AUTORES

Coordinadores:

Borrás Rocher, Fernando
Botella Beviá, Federico
Calvo Calabuig, Roland
Devesa Botella, Antonio Francisco
Segura Heras, José Vicente

Autores:

Abelenda Lombardo, Maria del Pilar
Antón Felanich, Francisco
Belda Albero, Mª Teresa
Beneyto i Vañó, Joaquim B.
Cantó Esquembre, Mª Carmen
Casanova Alberola, Francisco
Fabra Molera, Moisés
Enseñat Fernandez, Nuria
Espinar Frías, Pedro Antonio
Frías Fernández, Cristina
Garcés Moret, Marcelino
Gil Poveda, Manuel
Izquierdo Hortelano, Diana
López Juárez, Fernando
Maldonado García, Mª Carmen
Martínez Boix, José Manuel
Pascual Bartolomé, Ángela
Rodríguez Rubio, Mª Isabel
Sanz García, Raquel
Toledo Melero, Francisco Javier
Úbeda Müller, Juan
Vera García, Gemma

Subvencionado por:

Terra Mítica

Colaboran:

Centro de Investigación Operativa de la Universidad
Miguel Hernández de Elche.
Centro de Formación, Innovación y Recursos Educativos
de Elche (CEFIRE).

EGIPTO

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. Repartiendo panes	-Aritmética y álgebra	-Números racionales. Operaciones
2. Repartos proporcionales	-Aritmética y álgebra	-Números racionales. Operaciones
3. La sombra de la pirámide	-Geometría	-Figuras planas y cuerpos elementales
4. Más alturas	-Geometría	-Figuras planas y cuerpos elementales
5. De pirámides y volúmenes	-Geometría	-Áreas y volúmenes
6. Pirámides truncadas	-Geometría	-Áreas y volúmenes
7. ¿Conoce el faraón el número π?	-Geometría	-Áreas y volúmenes
8. Volumen de un granero	-Geometría	-Áreas y volúmenes
9. Ecuaciones muy antiguas	-Aritmética y álgebra	-Ecuaciones de primer grado
10. Una de fracciones	-Aritmética y álgebra	-Números racionales. Operaciones

1. REPARTIENDO PANES

Los egipcios dominaban las operaciones aritméticas usuales, como suma, resta, multiplicación y división. Para las dos primeras, simplemente añadían o sustraían símbolos. Para las segundas, disponían de métodos propios, muy diferentes a los actuales, pero igualmente útiles para sus necesidades. Te recomendamos localizar, en el capítulo dedicado al primer ciclo, este asunto, y que aprendas como se manejaban con el cálculo aritmético.

El producto y multiplicación resultaban sencillos. Pero no la división no entera (no exacta), aunque el proceso es similar, salvo en el momento en que se agoten las duplicaciones, en el que se procede con divisiones. Por ejemplo, calcular 21 : 6, consiste en averiguar qué número multiplicado por 6 da 21, es decir, ¿? x 6 = 21

No duplicamos porque el doble de 12 superaría a 21.

1	6
2	12

Sin embargo, con la suma de las cantidades de la segunda columna no se obtiene 21 pues 21 – 12 = 9 y 9 – 6 = 3, hemos de continuar, pero ahora con divisiones (1/2, 1/4...):

Ahora utilizamos fracciones de 6.

1	6
2	12
1/2	3

Ahora sí es posible, 21 – 12 = 9 y 9 – 6 = 3 junto a 3 – 3 = 0, indican que 21 = 12 + 6 + 3, por tanto, la solución es 2 + 1 + 1/2 = 3 + 1/2 = 3,5, es decir, 21 : 6 = 3,5.

Si trasladamos estos conceptos a la vida cotidiana de los egipcios, vemos que son necesarios para proceder al reparto de alimentos, por ejemplo, hogazas de pan. Con el resultado anterior, el proceso para repartir 21 hogazas entre 6 egipcios sería dar 2 hogazas a cada uno (quedan 21 – 12 = 9), de las nueve restantes dar una a cada uno (quedan 9 – 6 = 3) y con los 3 panes que quedan partirlos en dos trozos y dar un trozo a cada uno.

1.1. Un problema frecuente ha sido la distribución de las raciones entre los miembros de una comunidad. ¿Sabrías dividir equitativamente, mediante el método de las duplicaciones sucesivas, 710 hogazas de pan entre 40 personas?

2. REPARTOS PROPORCIONALES

Sin embargo, la mayoría de los repartos en el antiguo Egipto eran desiguales. No percibía lo mismo un sacerdote, un escriba o un esclavo. Así el problema 65 del papiro de Rhind plantea una cuestión muy parecida a la siguiente:

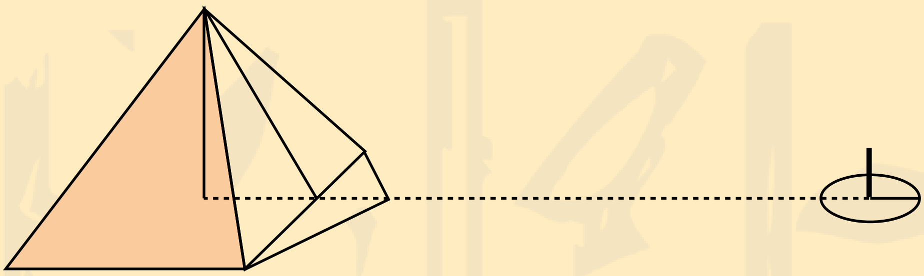
2.1. Así pues, si ocho hombres reciben su ración y dos reciben el doble, supondremos que hay 12 hombres entre los que repartir los 100 panes.

2.2. Reparte, usando el método de las duplicaciones sucesivas, 320 panes entre 20 hombres: un capataz, un guardián, un sacerdote, un escriba, teniendo cada uno el doble que los 16 trabajadores restantes.

3. LA SOMBRA DE LA PIRÁMIDE

¿Sabían medir la altura de las pirámides? Los arquitectos egipcios hacían sus operaciones y construcciones geométricas sobre la arena del desierto, mediante cuerdas y estacas. Su procedimiento para medir la altura de una pirámide consistía en esperar a que el sol estuviese a 45° de altura sobre el horizonte.

En el proceso se clava una estaca verticalmente en el centro de un círculo, cuyo radio es igual a la longitud de la estaca. En el instante en que la sombra de la estaca toca el borde del círculo, se mide la longitud de la sombra de la pirámide y se le añade la mitad de la longitud de la base. Esa es la altura de la pirámide.



Este método presentaba el inconveniente de que había que esperar a las fechas adecuadas. El filósofo Thales no era egipcio, pero ideó un procedimiento para medir la altura de la gran pirámide de Keops sin tener que esperar a las fechas en que el sol a mediodía está a 45°. Su método se basaba en la semejanza de triángulos. Plantó una estaca vertical en el suelo, en el extremo de la sombra de la pirámide. Entonces, la estaca, su sombra y los rayos del sol forman un triángulo rectángulo semejante al que forman la altura de la pirámide, los rayos del sol y la sombra de la pirámide más la mitad de la longitud de la base de la pirámide.

3.1. Sabemos que la gran pirámide de Keops mide 230 m. de lado y que si clavamos una estaca de 1 m., cuando su sombra mide 1,5 m., la sombra de la pirámide mide 104 m. Realiza un dibujo aproximado de la pirámide y calcula su altura utilizando el método ideado por Thales.

4. MÁS ALTURAS

Puedes utilizar este método, basado en la semejanza de triángulos, para calcular la altura de cualquier objeto. Únicamente necesitarás una cinta métrica y algo de habilidad en el cálculo numérico. Tú mismo puedes formar con tu altura el triángulo que se forma con la estaca. Como ejemplo de la eficacia del método puedes probar con cualquier objeto del que conozcas su altura y que te sirva para comprobar si lo dominas.

Un ejercicio muy sencillo consiste en averiguar la altura del Obelisco o Aguja de Cleopatra, situado en la entrada de Terra Mítica, en la plaza del mismo nombre. El obelisco tenía como objeto atravesar las nubes y dispersar las fuerzas negativas que ocultan al Dios Sol. La Aguja de Cleopatra se construyó en 1468 a.C. y, actualmente, se encuentran (son dos realmente) en Londres y en Central Park de Estados Unidos.

4.1. Utiliza una cinta métrica para obtener la longitud de tu sombra y tu altura, y mediante el método ideado por Thales calcula la sombra de este obelisco, sabiendo que la altura del mismo es de 20,87 metros. (Supondremos que la diferencia de latitud y longitud no influyen).

5. DE PIRÁMIDES Y VOLÚMENES

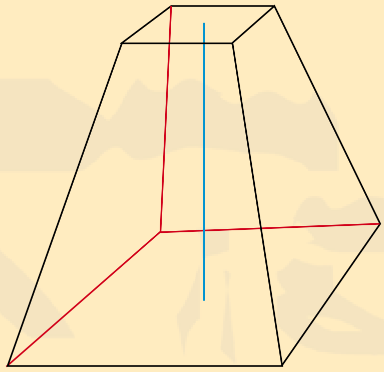
Para que te hagas una idea de la enorme construcción que es la pirámide de Keops, te vamos a pedir que realices unos sencillos cálculos. Has de saber, previamente, que la unidad básica de superficie en el antiguo Egipto era el **setat**, que correspondía al área de un cuadrado de 100 codos de lado (un codo era una unidad de longitud que equivale a 0,523 m). Pues bien:

5.1. Calcula en setats y en m^2 (para comparar), las áreas laterales y total de la gran pirámide de Keops, que mide 147 metros de altura y cuya base es un cuadrado de 230 metros de lado.

5.2. Calcula en **jars**, antigua unidad egipcia de volumen que equivale a 96 litros, y en m^3 el volumen de la pirámide. ¿Cuántos camiones cisterna de 10.000 litros de capacidad se necesitarían para llenarla?

6. PIRÁMIDES TRUNCADAS

La mayor parte de la matemátida egipcia nos ha llegado a nosotros a través de dos escritos fundamentales: los papiros de Rhind y de Moscú, pues bien, te pedimos que seas un buen escriba y que leas con atención el enunciado de otro problema, en concreto, el problema número 14 del papiro de Moscú, considerado como la auténtica joya de la matemática egipcia:



Ejemplo de cómo calcular una pirámide truncada; si se os dice, una pirámide truncada de altura 6 y bases 4 y 2, debéis tomar el cuadrado de 4 que es 16, después doblar cuatro para obtener 8, tomar el cuadrado de 2 que es 4, sumar 16, 4 y 8 para obtener 28; después calcular 1/3 de 6 que es 2; multiplica 28 por 2 que da 56; veis, es 56.

6.1. Sé un buen aprendiz de escriba y usa el procedimiento anterior para calcular el volumen de una pirámide truncada de 12 de altura, por 8 de base, por 5 de arriba.

7. ¿CONOCE EL FARAÓN EL NÚMERO π?

Hemos podido comprobar que los egipcios eran grandes geómetras, ¡cómo alzar, si no, sus pirámides! Sin embargo, desconocían las fórmulas geométricas que usamos, hoy en día, para obtener fácilmente áreas y volúmenes. Sus campos de cultivo tenían formas que representaban no solo rectángulos sino, en general, cuadriláteros de formas irregulares. No está documentado que cultivaran campos en forma distinta a la rectangular, pero parece probable que necesitaran el cálculo de superficies circulares para construir graneros cilíndricos. Quizá, por ello, sabían obtener, de manera aproximada, el área de un círculo.

Como prueba de ello, te mostramos el problema 50 del papiro Rhind cuyo enunciado es: **Calcula el área de un campo circular cuyo diámetro es 9 khet** (el **khet** es una medida de longitud equivalente a 52 m. aproximadamente). El procedimiento desarrollado en el propio papiro es así: **Resta al diámetro (que es 9) 1/9 del mismo, que es 1. La diferencia es 8. Ahora multiplica 8 veces 8, que da 64. Éste es el área del círculo.**

No obtenían el valor exacto del área, sino que calculaban una aproximación, relacionada con un octógono sobre el que situaban el círculo.

7.1. Utiliza esta aproximación para calcular el área de la base de un granero cilíndrico de 2 m. de radio.

7.2. Compara el resultado anterior con el que se obtiene mediante la fórmula actual, calculando el error relativo que se comete con el método egipcio.

8. VOLUMEN DE UN GRANERO

8.1. Si se diese como válida la aproximación del cálculo egipcio, ¿qué valor tendríamos que asignar a la constante π?

De hecho, el problema 41 del papiro Rhind muestra cómo obtener el volumen de un granero de este tipo: Ejemplo de hacer un granero redondo (cilíndrico) de (diámetro) 9 (codos) y (altura) 10 (codos). Es claro, que si el valor para el área del círculo es aproximado, también será aproximado el volumen de los graneros construidos con base circular. El escriba indica las siguientes operaciones:

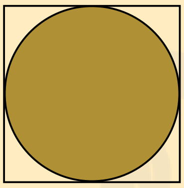
- Se calcula 1/9 del diámetro,
- se le resta al propio diámetro,
- dicho resto se multiplica por sí mismo,
- se multiplica por 10 (altura).

8.2. Compara el valor obtenido anteriormente con el que obtendrías si aplicaras la fórmula para el volumen de un cilindro.

Aún iban más allá, al afirmar que la relación entre el área de un círculo y la longitud de su circunferencia es la misma que la relación existente entre el área y el perímetro del cuadrado circunscrito a dicho círculo, es decir,

$A_{\text{CÍRCULO}} / L_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = A_{\text{CUADRADO CIRCUNSCRITO}} / P_{\text{CUADRADO CIRCUNSCRITO}}$

8.3. Pon a prueba a los geómetras egipcios y comprueba dicha relación para un círculo de radio 1 metro y su cuadrado circunscrito.



8.4. Comprueba la validez general de esta afirmación a partir de un círculo cualquiera de radio “r” (necesitas expresar de forma general el área y el perímetro del cuadrado circunscrito al círculo de radio r y comparar el resultado de su cociente con el del área de dicho círculo de radio r y la longitud de su circunferencia).

9. ECUACIONES MUY ANTIGUAS

Has podido comprobar que la Geometría era sin duda la parte de las matemáticas que más utilizaron los egipcios, pero, no sólo tenían conocimientos de Geometría, necesarios para construir las impresionantes pirámides, también podían resolver problemas que, en la actualidad, resolvemos mediante una ecuación de primer grado y que ellos resolvían como podían. Ahora te proponemos que con la única ayuda de tus conocimientos de Álgebra intentes resolver el problema 24 del papiro de Rhind, en el que se lee: **Calcula el valor del aha (montón) si el aha y un séptimo del aha son iguales a 19.**

9.1. Expresa mediante una ecuación de primer grado sencilla el enunciado del problema y resuélvela.

9.2. Resuelve el problema 26: **Una cantidad y su cuarto se convierten en 15, calcula la cantidad.**

10. UNA DE FRACCIONES

En las actividades para el primer ciclo hemos destacado que utilizaban fracciones, sobre todo, aquéllas con numerador 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4,..., y las fracciones 2/3 y 3/4. Nosotros, normalmente escribimos un número no entero en forma decimal, 3,75, o, mediante una fracción, 15/4. Sin embargo, los egipcios utilizaban una curiosa forma de trabajar con fracciones. Estas siempre tenían de numerador el 1 y de denominador cualquier número entero mayor de 1. No tenían notación para escribir fracciones que no fueran del tipo anterior, ni siquiera hay muestras escritas de ellas. Por ejemplo, la fracción 3/4 era, para ellos, la suma 1/2 + 1/4, o, la fracción 6/7 era 1/2 + 1/3 + 1/42. Pero no consideraban descomposiciones de la forma, 1/2 = 1/4 + 1/4, en las que se repetía el mismo sumando.

No sabemos exactamente el método que usaban para conseguir estas descomposiciones, pues no son únicas. En todos los escritos estudiados la descomposición que se ha encontrado es la más sencilla posible y no es un problema trivial encontrarla. Un número de matemáticos famosos se ha interesado por este problema y se ha encontrado diferentes algoritmos para realizar la descomposición.

10.1. Como hemos comentado anteriormente, la descomposición de una fracción en suma de "fracciones egipcias" no es única, ¿podrías escribir n tal que 3/4 = 1/2 + 1/5 + 1/n? ¿Y tal que 3/4 = 1/2 + 1/6 + 1/n?

10.2. Resuelve el problema 13 del papiro de Rhind: Multiplica 1/16 + 1/112 por 1 + 1/2 + 1/4.

GRECIA

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. Una gran matemática: Hipatia de Alejandría	-Aritmética	-Sopa de letras -Estrategias de búsqueda
2. Los Juegos Olímpicos	-Análisis	-Estrategias de búsqueda -Construcción de la ecuación de una función lineal
3. Alejandro el Conquistador	-Aritmética	-Razones -Magnitudes proporcionales
4. Los números mágicos de la escuela pitagórica	-Análisis	-Estrategias para contar -Construcción de la ecuación de una función lineal
5. Epitafio de Diofanto	-Álgebra	-Ecuaciones -Planteamiento y resolución de una ecuación de primer grado
6. Cómo coger a un ladrón	-Aritmética	-Razones -Magnitudes proporcionales -Relación entre volumen y densidad
7. El teorema ¿de Pitágoras?	-Geometría	-Construcción del teorema mediante figuras planas -Identificación de figuras en el plano
8. ¿Un número de oro?	-Geometría -Aritmética -Análisis -Álgebra	-Construcción intuitiva del número de oro -Sucesión de Fibonacci -Originando y resolviendo una ecuación de 2º Grado
9. El curioso de Arquestrato	-Geometría	-Semejanza en el plano -Semejanza de triángulos
10. ¿Puedes resolver este crucigrama?	-Geometría -Aritmética -Análisis	-Crucigrama

1. UNA GRAN MUJER MATEMÁTICA: HIPATIA DE ALEJANDRÍA

Hipatia de Alejandría fue una de las primeras mujeres en la historia que contribuyó al desarrollo de las matemáticas. Nació en Alejandría, Egipto en el año 370 de nuestra era y murió en esa misma ciudad en el 415.

De la madre de Hipatia no se tiene ningún registro pero se sabe que su padre fue Teón de Alejandría, quien era un ilustre filósofo y matemático de esa época y que fue el maestro de Hipatia desde que ella fuera pequeña. Realmente Teón era una excepción y permitió que su hija se convirtiera en astrónoma, filósofa y matemática, cosa que era sumamente inusual en un sistema en el que las mujeres no tenían derecho a la educación.

Teón, padre de Hipatia, trabajaba en el Museo, institución dedicada a la investigación y la enseñanza que había sido fundada por Tolomeo, emperador que sucedió a Alejandro Magno, fundador de la ciudad de Alejandría. El Museo tenía más de cien profesores que vivían **allí** y muchos más que asistían periódicamente como invitados. Hipatia entró a estudiar con ellos y aunque viajó a Italia y Atenas para recibir algunos cursos de filosofía se formó como científica en el Museo y formó parte de él hasta su muerte, llegando incluso a dirigirlo alrededor del año 400.

Hipatia se dedicó, durante veinte años, a investigar y enseñar Matemáticas, Geometría, Astronomía, Lógica, Filosofía y Mecánica en el Museo, ocupaba la cátedra de Filosofía platónica por lo que sus amigos y compañeros la llamaban "la filósofa". Ganó tal reputación que al Museo asistían estudiantes de Europa, Asia y África a escuchar sus enseñanzas sobre "la Aritmética de Diofanto", convirtiéndose su casa en un gran centro intelectual.

Citando nuevamente a Sócrates Escolástico: "consiguió un grado tal de cultura que superó con mucho a todos los filósofos contemporáneos. Heredera de la escuela neoplatónica de Plotinio, explicaba todas las ciencias filosóficas a quien lo deseara. Con este motivo, quien deseaba pensar filosóficamente iba desde cualquier lugar hasta donde ella se encontraba... pero a más de saber filosofía era también una incansable trabajadora de las ciencias matemáticas".

Hipatia se convirtió en una de las mejores científicas y filósofas de su época, erudita de un conocimiento que los cristianos identificaban con el paganismo y que por tanto perseguían.

Los cristianos quemaron y destruyeron todos los templos y centros griegos, persiguieron a todos los académicos del Museo obligándolos a convertirse al cristianismo si no querían morir. Hipatia se negó, se negó a convertirse al cristianismo, se negó a renunciar al conocimiento griego, a la filosofía y a la ciencia que por más de veinte años había aprendido y enseñado en el Museo. En la cuaresma, en marzo del 415, acusada de conspirar contra el patriarca cristiano de

1. UNA GRAN MUJER MATEMÁTICA: HIPATIA DE ALEJANDRÍA

Alejandría, fue asesinada. Un grupo de cristianos enardecidos la encontraron en el centro de Alejandría y, dejando hablar a Sócrates Escolástico: "La arrancaron de su carruaje, la dejaron totalmente desnuda; le tasajearon la piel y las carnes con caracoles afilados, hasta que el aliento dejó su cuerpo..."
Al asesinar a Hipatia asesinaron a una mujer, a una matemática y filósofa, la primera en la historia y la más notable de su época; pero no pudieron asesinar el pensamiento filosófico y matemático griego.

INVESTIGA Y CONTESTA:

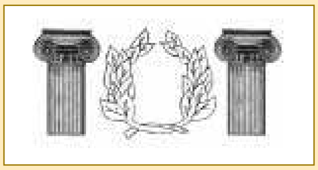
1.1. ¿Cuántos años vivió Hipatia?

1.2. ¿La vida de Hipatia fue normal y acorde a la época en la que vivió?
Razona tu respuesta.

1.3. Vuelve a leer el capítulo y busca en esta sopa de letras:
Apodo de Hipatia
Nombre del padre de Hipatia
Lugar donde desarrolló su trabajo
Seis materias en las que investigó y enseñó
Dedicó parte de sus enseñanzas a "La aritmética de..."

O	T	N	G	F	I	R	M	N	A	T
T	F	G	E	O	M	E	T	R	I	A
N	I	M	A	S	O	E	S	U	M	S
A	L	T	E	A	S	C	C	F	O	D
F	O	F	D	C	S	C	M	L	N	A
O	S	T	F	A	A	C	I	G	O	L
I	O	D	T	E	O	N	M	T	R	C
D	F	C	A	S	F	D	I	A	T	T
F	I	L	O	S	O	F	A	C	S	A
S	A	C	I	T	A	M	E	T	A	M

2. LOS JUEGOS OLÍMPICOS



Según la tradición, los primeros Juegos Olímpicos se celebraron en el año 776 antes de nuestra era.

El barón Pierre de Coubertín, apasionado por el ideal atlético de los antiguos griegos hizo revivir el espíritu olímpico. Los Juegos antiguos habían quedado interrumpidos por un edicto del emperador Teodosio en 393 d.C. Los primeros Juegos Olímpicos de la Edad Moderna se abrieron en 1896 y se celebraron simbólicamente en su patria de origen, Grecia, concretamente en su capital, Atenas. En las pruebas participaron trece países. Cuatro años después de Atenas, París recibía de nuevo a los atletas. Los organizadores quisieron con ello mantener la periodicidad de los antiguos Juegos, que hoy acogen a más de 15.000 atletas de todo el mundo.

A continuación mostramos datos de participación de las últimas ediciones de Los Juegos Olímpicos:

Año	**1980**	**1984**	**1988**	**1992**	**1996**
Ciudad	**Moscú**	**Los Ángeles**	**Seúl**	**Barcelona**	**Atlanta**
Países	80	140	159	169	198
Eventos	203	221	237	257	268
Deportes	21	21	23	23	53
Hombres	4.092	5.230	6.279	6.659	7.000
Mujeres	1.125	1.567	2.186	2.708	3.750

También vamos a proporcionarte el número de medallas que obtuvo España en cada una de las anteriores ediciones:

Año	**1980**	**1984**	**1988**	**1992**	**1996**	**2000**
Ciudad	**Moscú**	**Los Ángeles**	**Seúl**	**Barcelona**	**Atlanta**	**Sydney**
Oro	1	1	1	13	5	3
Plata	3	2	1	7	6	3
Bronce	2	2	2	2	6	5

2. LOS JUEGOS OLÍMPICOS

CUESTIONES:

2.1. ¿Durante cuántos años se celebraron los primeros Juegos Olímpicos?

2.2. ¿Cuántos se celebraron?

2.3. Si los Juegos Olímpicos modernos se reanudaron en 1896, ¿cuántos se han celebrado hasta la fecha? ¿Cuándo se celebrarán las próximas Olimpiadas?

2.4. ¿Podrías obtener una función que nos indicara esta relación?

2.5. ¿Cuándo se organizaron Los Juegos Olímpicos en España?, ¿Dónde?, ¿Qué posición ocupan?

2.6. ¿Cuántos atletas han participado en las últimas ediciones? Halla el porcentaje de participación. ¿Se ha producido un incremento o una reducción? Halla el índice de variación.

2.7. Análogamente pero con el número de medallas conseguidas por España.

2.8. Muestra la información obtenida mediante gráficos: ¿qué tipos de gráficos utilizarías?, razona la respuesta en cada uno de los casos.

3. ALEJANDRO EL CONQUISTADOR

Alejandro era muy joven cuando heredó el trono de Macedonia. Había sido educado por el filósofo Aristóteles en unos ideales de culto al valor y a la inteligencia.

Parece ser que su sueño fue organizar y unificar un gran imperio en el que se mezclaran las culturas orientales (egipcia, siria, mesopotámica) con la griega. Este es el sentido que tiene la palabra helenístico.

Este mapa reproduce la conquista del Imperio persa por Alejandro Magno.

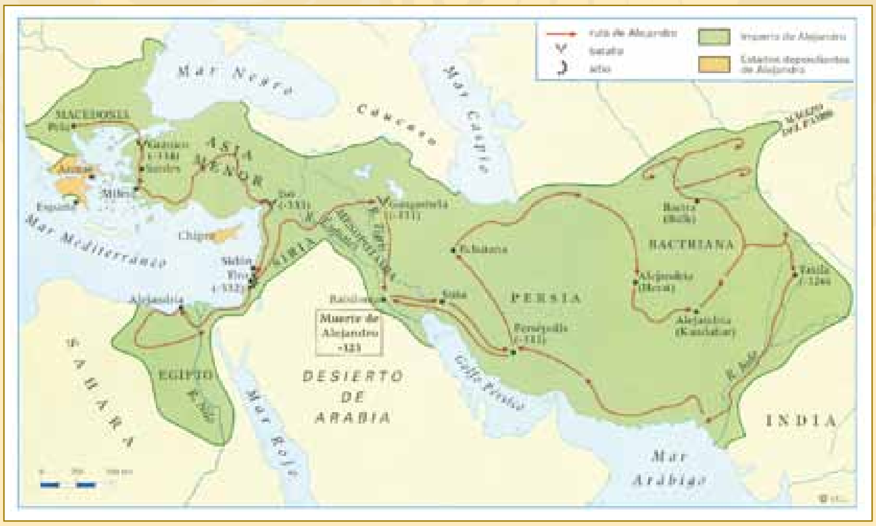
En la base del mapa tienes la siguiente relación: 1 cm. equivale a 500 km. en la realidad.

Sugerimos que contestes a las siguientes cuestiones:

3.1. Fíjate en las fechas, y considerando la más antigua y la más moderna contesta: ¿Cuántos años duró la conquista?

3.2. ¿Cuál es la escala utilizada en el mapa?

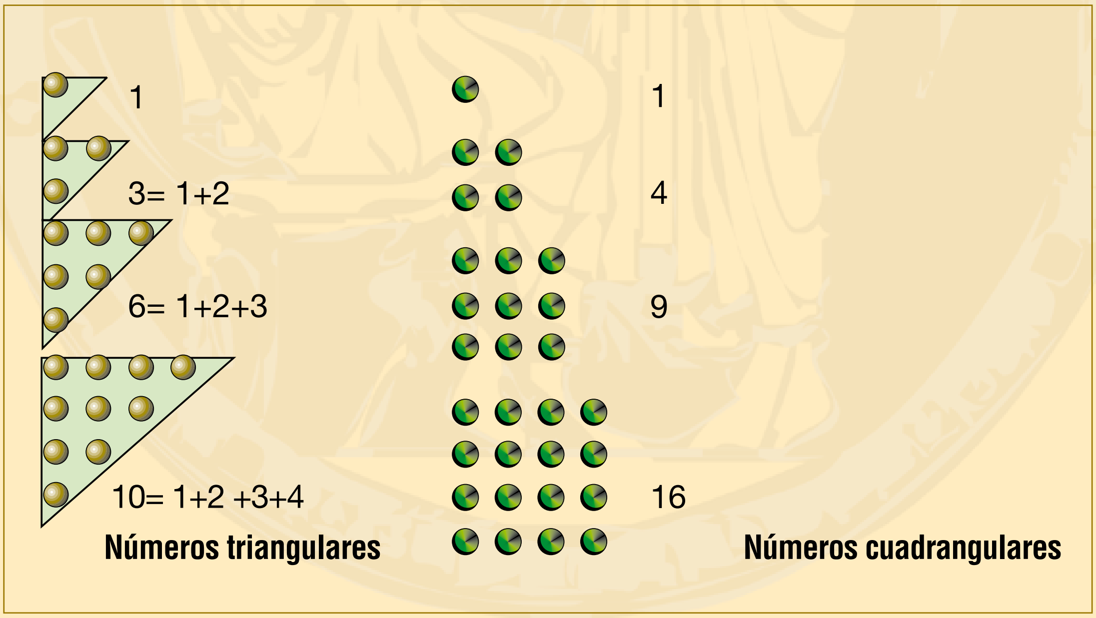
3.3. ¿Se te ocurre alguna forma de conseguir una aproximación de la superficie conquistada? (ojo ten en cuenta la escala).



4. LOS NÚMEROS MÁGICOS DE LA ESCUELA PITAGÓRICA

La magia de los números se manifestó en Grecia con la escuela pitagórica. A mucha gente le encantaban las charadas de Pitágoras, el gran matemático (charadas que eran muy ingeniosas), y lo escuchaban con gran curiosidad e interés.

La escuela pitagórica daba cualidades morales a los números y a las figuras geométricas. El 1 representaba la razón (origen de todos los otros números): el 2, el primer número hembra (par); el 3, el primer número macho (impar); el 4 representaba la justicia; el 5, el matrimonio (suma del primer número hembra, el 2, con el primer número macho, el 3); también estaba en las propiedades del número 5 el secreto del color; el 6 representaba el secreto del frío; el 7, el de la salud; en el 8, el del amor (suma del 3, el macho-potencia, y del 5, matrimonio); el 9 parece ser el matrimonio perfecto (suma de 4, la justicia, con el 5, matrimonio); y el 10 era uno de los números triangulares, que eran números de buena suerte. Este número 10 (llamado número triangular de cuatro filas o tretaktys) era el símbolo por el cual juraban los pitagóricos.



4. LOS NÚMEROS MÁGICOS DE LA ESCUELA PITAGÓRICA

Te proponemos lo siguiente:

Ya que la palabra "cálculo" proviene de la palabra griega calculi, que significa piedra, dibuja el quinto y sexto número triangular y cuadrangular y en base a éstos contesta:

4.1. ¿Qué diferencia hay entre dos números triangulares?

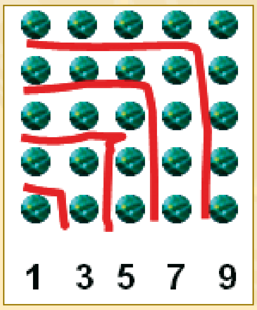
4.2. ¿Podrías calcular el décimo número triangular? (ojo, para calcularlo fíjate que es una suma. Utiliza n = nº de piedras laterales).

4.3. Consigue una expresión que te permita calcular cualquier número triangular en función del número de piedras utilizadas.

4.4. Toma cualquier número entero positivo (¡ojo! el que tú quieras) y comprueba que puedes confeccionarlo con un máximo de tres números triangulares (ej: 83 = 10+28+45) Curioso ¿No?

4.5. Toma dos a dos los números triangulares ¿qué tipo de números obtienes?

4.6. Consigue una expresión que te permita calcular cualquier número cuadrangular en función del número de piedras utilizadas.



4.7. Consigue una expresión que relacione el número cuadrangular con el número de piedras de la última "capa".

5. HASTA EN LA TUMBA OS DARÉ QUE PENSAR (EPITAFIO DE DIOFANTO)

Muy poco se sabe de la vida de Diofanto (vivió entre el 150 a.C. y el 350 d.C.).

La obra más conocida de Diofanto es Aritmética, una colección de 130 problemas, la mayoría de ecuaciones de primer y segundo grado, pero siempre con soluciones positivas y racionales, pues en aquella época no tenían sentido los números negativos y mucho menos los irracionales.

Diofanto consideró tres tipos de ecuaciones de segundo grado:

$ax^2 + bx = c$
$ax^2 = bx + c$
$ax^2 + c = bx$

El motivo de no considerar estas ecuaciones como una sola es que en aquella época no se conocía la existencia del cero ni los números negativos.

Diofanto introdujo símbolos para representar las cantidades desconocidas y una abreviatura para la palabra igual, lo cual fue un paso muy importante hacia el álgebra simbólica actual.

Se puede considerar a Diofanto como el fundador del Álgebra.

En su tumba había un curioso epitafio escrito en forma de problema algebraico que daba detalles de su vida. Fíjate en las frases de la izquierda, desarrolla su expresión algebraica y resuelve la última ecuación, obtendrás cuántos años vivió Diofanto.

5. HASTA EN LA TUMBA OS DARÉ QUE PENSAR (EPITAFIO DE DIOFANTO)

¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto.
Los números pueden mostrar,

¡oh maravilla! La duración de su vida,

cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.

Había transcurrido además una duodécima
parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.

A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió
en un matrimonio estéril.

Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el
nacimiento de su primogénito.

Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra,
habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.

Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con
profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años
a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que
le llegó la muerte.

6. CÓMO COGER A UN LADRÓN

Cuenta la historia que Hierón, el monarca de Siracusa, hizo entrega a un platero de la ciudad de ciertas cantidades de oro y plata para el labrado de una corona. Finalizado el trabajo, Hierón, desconfiado de la honradez del platero y aún reconociendo la calidad de la obra, solicitó a Arquímedes que sin romper la corona comprobase si el platero la había rebajado con otros metales, guardándose para sí parte de lo entregado.

Para solucionar el problema, Arquímedes mandó construir otra corona con la misma cantidad de oro y plata. Sumergió ambas en sendos barreños llenos hasta el borde de agua y vio que la corona hecha por el orfebre desplazaba (derramaba del barreño) más agua que la que había construido él. ¿Qué conclusión obtuvo de esta experiencia?

6.1. Si la cantidad entregada para la corona fue de 1 kg. de oro y 0,5 kg. de plata ¿qué volumen de agua debía desalojar? (recuerda: densidad del oro = 19,3 g/cm^3 y densidad de la plata = 10,5 g/cm^3).

6.2. Calcula el volumen si fuera sólo de oro.

6.3. Calcula el volumen si fuera sólo de plata.

6.4. ¿Entre qué dos valores de volumen estimas que estaba la que hizo el platero?

Arquímedes de Siracusa, matemático, físico e inventor griego, nacido en Siracusa (285-212 a.C.)

7. EL TEOREMA ¿DE PITÁGORAS?

ὑποτενοῦσα del griego ὑποτείνω: fijar, sujetar fuertemente una cosa a otra.
κάθετος (cateto) perpendicular, línea que cae a plomo.

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que vivió en el periodo 585 – 500 a.C. Hombre místico y aristócrata que fundó la Escuela Pitagórica, una especie de secta cuyo símbolo era el pentágono estrellado, y dedicada al estudio de la filosofía, la matemática y la astronomía.

Por muchos años se le ha atribuido a Pitágoras el enunciado y demostración del teorema geométrico que lleva su nombre. Aunque algunos historiadores consideran lo contrario, ha resultado difícil demostrarlo, debido al misterio que rodeaba las enseñanzas de la escuela, así como el carácter verbal de éstas y la obligación de atribuir todos los conocimientos al jerarca de la escuela.

Existen evidencias de que en otras culturas también se conocía el teorema. Por ejemplo, los hindúes enuncian explícitamente una regla equivalente a este teorema en el documento Sulva – Sutra que data del siglo VII a.C.

Por otra parte, los Babilonios aplicaban el teorema 2.000 años a.C., pero tampoco se conoce de la existencia de una demostración, ya que la geometría no era para ellos una teoría formal sino un cierto tipo de aritmética aplicada, en la cual las figuras venían representadas en forma de números.

A su vez, los egipcios conocían que el triángulo de lados 3, 4 y 5 es rectángulo pero no se conoce de la existencia de alguna regla que sustente el conocimiento del teorema.

Algunos aseguran que durante sus viajes a Egipto y al oriente antiguo, el sabio griego conoció el enunciado de la regla y se dedicó a demostrarla.

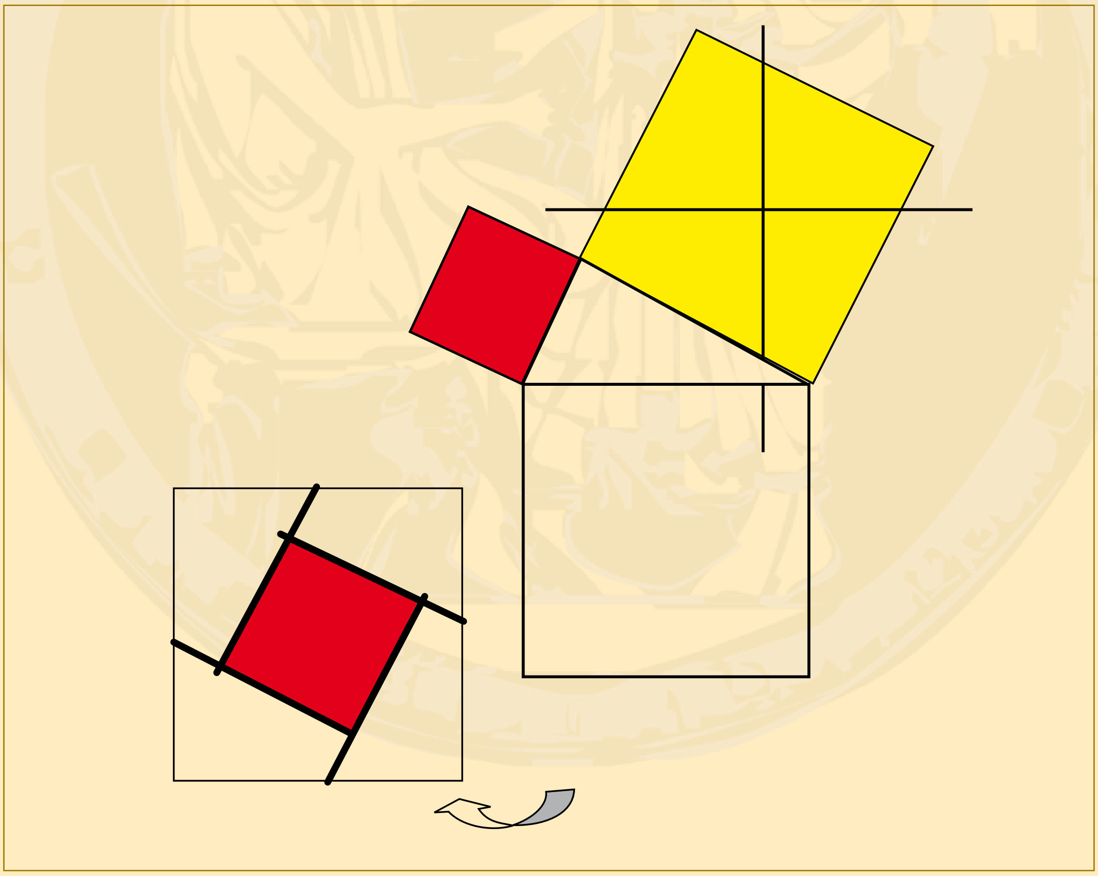
Una de tantas demostraciones aunque quizá una de las más visuales es la disección de Peigal.

7. EL TEOREMA ¿DE PITÁGORAS?

Sobre el mayor de los cuadrados construidos sobre los catetos se determina el centro (no necesariamente ha de ser este punto) y se trazan dos rectas, una paralela y otra perpendicular a la hipotenusa del triángulo. Con las cuatro piezas obtenidas más el cuadrado construido sobre el otro cateto podemos cubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

¡¡Eso es lo que vas a hacer tú!!

Con cartulina blanca dibujas un triángulo rectángulo. Luego con cartulina de otros colores y tomando como lado de los cuadrados los catetos y la hipotenusa construyes los tres cuadrados. Sigue las instrucciones de Peigal para cortar en cuatro nuestro cuadrado amarillo y por fin tienes que conseguir tapar el azul con las cuatro piezas amarillas y el cuadrado rojo.



8. ¿UN NÚMERO DE ORO?

La geometría, según cuentan los historiadores, nace a orillas del río Nilo. El faraón obligaba a pagar los tributos proporcionalmente a la extensión de las tierras de cada propietario. La medida de áreas, distancias y ángulos favoreció al desarrollo de técnicas que supuso el inicio de un proceso de abstracción donde se consideraban líneas y gráficos y donde las distancias lineales y angulares podían ser tratadas matemáticamente.

En Matemáticas hay números con "nombre propio", ya conoces algunos, como Pi "π", que nos relaciona la longitud de la circunferencia con el diámetro de dicha circunferencia. Además hay otros, te vamos a presentar un número curioso, el "número de oro" o "número FI", "Φ".

Fueron los griegos quienes sistematizaron y formalizaron esas estructuras, descubriendo propiedades curiosas entre las que se encuentra el número FI (Φ). El valor de tal número es 1,61803...y su nombre se debe a la inicial del nombre del escultor griego Fidias (siglo V a.C., autor del friso y del frontis del Partenón).

Cuestiones:

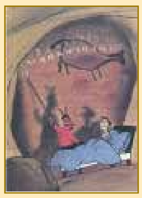
8.1. Dibuja un rectángulo en un papel blanco.
Mide la longitud de sus lados y halla la razón entre el lado mayor y el menor.
Haz una puesta en común del resultado obtenido con tus compañeros, ¿se observa alguna similitud?
Se obtiene una aproximación a un cierto número, el número áureo.

8.2. La sucesión de Fibonacci.
Considera la sucesión numérica definida de la forma:

$a_1=1$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ para $n \rightarrow 2$
Se trata de una sucesión recurrente. Construye los primeros veinte términos de la sucesión.
Si realizas el cociente: a_n/a_{n-1}, con los términos construidos. ¿Qué observas en los valores obtenidos?

Comprueba: "Si dividimos cada término de la sucesión entre su anterior, los cocientes sucesivos convergen hacia el número aúreo".

8.3. Investiga:
Elige dos números naturales arbitrarios, suma dichos números; repite este proceso hasta obtener una sucesión de números..., ¡una sucesión de números que tú mismo has creado!
Si realizas el cociente entre un elemento de la sucesión y el anterior, obtenemos que los cocientes se aproximan al número áureo.

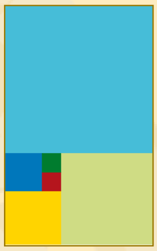


8. ¿UN NÚMERO DE ORO?

Definimos la **"sección áurea"** como la división armónica de un segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como éste es a la totalidad.

8.4. Expresa esta relación con un segmento de longitud 1. Encuentra la proporción. Plantea la ecuación de segundo grado y resuélvela. ¡Has encontrado el número áureo!

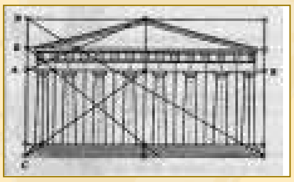
8.5. Construye el rectángulo áureo, para ello dibuja un cuadrado de lado 2 unidades, marca el punto medio de uno de sus lados, lo unes con uno de los vértices del lado opuesto y llevas esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo. Rectángulo cuyos lados están en proporción áurea.



Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, DNI, tarjetas de visita, cajetillas de tabaco,...

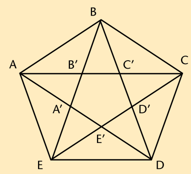
8.6. Presencia del número áureo.

El Partenón fue construido en la cima de la Acrópolis, entre 447 y 432 a.C., por orden de Pericles. En el transcurso del tiempo, el edificio sufrió numerosas vicisitudes. En 1687, el Partenón fue transformado en polvorín por los ocupantes turcos. Durante el sitio de Atenas, una bala de cañón lanzada por atacantes venecianos provocó una explosión que lo redujo a ruinas. En la actualidad, el Partenón ha sido recompuesto y su peor enemigo es la contaminación que destruye sus milenarias piedras. Su alzado guarda la proporción del número aúreo.

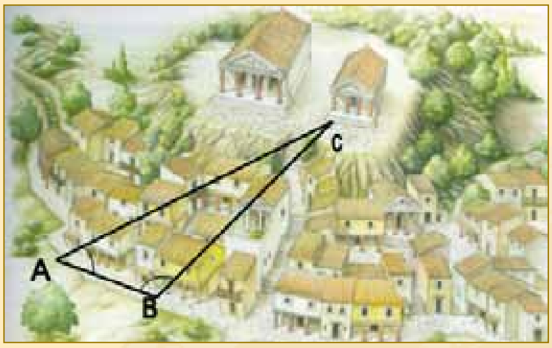


¡Comprueba!: "El cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número áureo".

Proporciones armoniosas del cuerpo.
En la naturaleza encontramos innumerables ejemplos: crecimiento de las plantas, piñas, distribución de las hojas en un tallo, dimensiones insectos y pájaros, formación de caracolas,..., entre otros ejemplos.
¿Puedes encontrar más ejemplos? Investiga.



9. EL CURIOSO DE ARQUESTRATO



Desde la casa de Arquestrato, el célebre cocinero griego (A), se ve el templo (C). Arquestrato quiere averiguar a qué distancia se encuentra. Para ello hace lo siguiente:

- Busca un lugar, B, relativamente próximo a su casa, desde el cual se vea el templo (casualmente resulta ser la casa de la bella Perséfone).

- Mide los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{A}$ y la distancia $\overline{AB}$
  $\overline{AB}$ = 100 codos $\hat{A} = 60°$ $\hat{B} = 105°$

- Construye, dibujándolo en el suelo, un triángulo A'B'C' semejante al ABC tomando:
  $\hat{A}' = 60°$ $\hat{B}' = 105°$ (luego ABC y A'B'C' son semejantes)

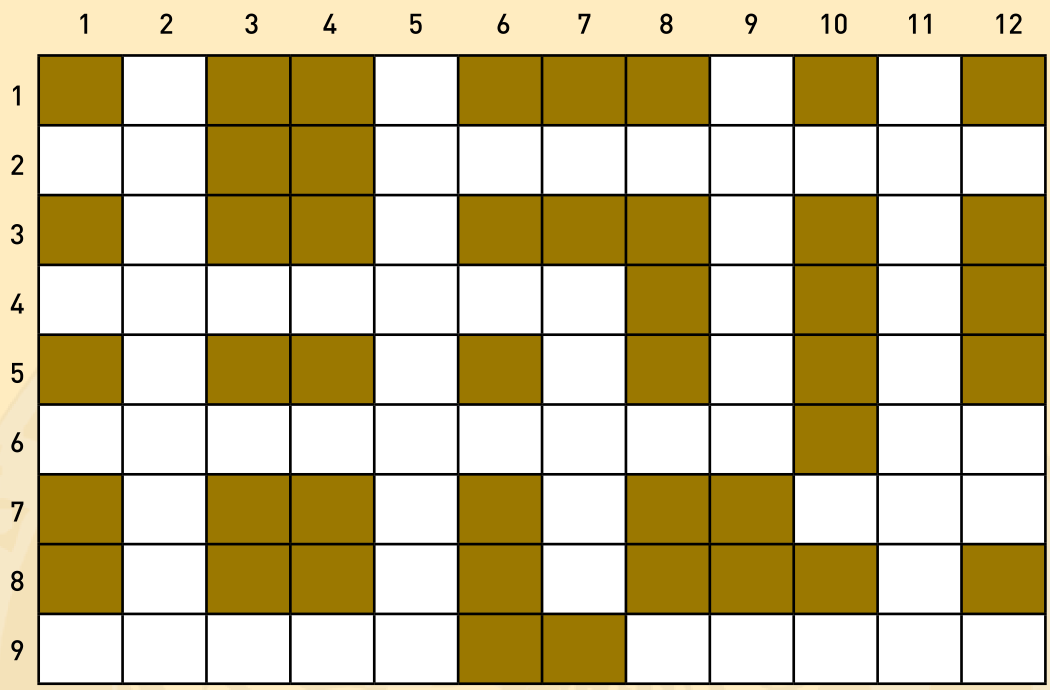
- Toma el lado $\overline{A'B'}$ = 80 dedos con lo que la razón de semejanza es
  1: ______ (ojo, pasa los codos a dedos).

- Mide sobre su dibujo, con una regla, la longitud del lado $\overline{A'C'}$ =373,2 dedos.

- Teniendo en cuenta la razón de semejanza, calcula, $\overline{AC}$,
  Nota:

1 dedo = 1/16 pie	
1 pie = 16 dedos	1 codo = 3/2 de pie

10. ¿PUEDES RESOLVER ESTE CRUCIGRAMA?



Horizontal:

2. Nombre de la letra griega "π" que en matemáticas representa un número irracional que nos proporciona la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.
   Famoso matemático cuya obra "Los Elementos" sienta las bases para la geometría.
4. Famosa matemática de Alejandría.
6. Famoso matemático griego.
   Al revés, cuarta nota musical.
7. Rectángulo áureo que sirve como documento para identificarnos.
9. Cuando la división no es exacta es porque el "........" no es cero.
   Famoso matemático griego que trabajó con criterios de semejanza.

Vertical:

2. Cuando en una división el resto es cero, decimos que el dividendo y el divisor son...
5. Polígono de cinco lados.
7. Nombre que recibe el número FI, Φ=1,61803..., por guardar la proporción divina, por su gran belleza y perfección.
9. Escultor griego al cual se debe el nombre del número FI, Φ=1,61803...
11. Criterios por los que podemos identificar diferentes figuras que aun siendo diferentes guardan ciertas propiedades.
12. Nombre de la letra griega "Φ" que representa el número "Φ=1,61803..."

ROMA

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	BLOQUE	CONTENIDOS
1. Teselas	-Geometría	-Áreas -Relaciones entre áreas
2. Los espectáculos	-Geometría	-Identificación de cónicas -Visión espacial de forma crítica -Cálculo longitud arco de curva -Aproximación
3. El puente	-Aritmética -Geometría	-Aproximación y redondeo -Unidades de peso y tiempo -Cálculo de volumen
4. El templo	-Aritmética -Proporcionalidad -Geometría.	-Razón de semejanza -Semejanza de triángulos -Razones trigonométricas
5. Circus Maximus	-Aritmética -Geometría	-Unidades de peso y volumen -Cálculo de área y espesor
6. Los arqueros matemáticos	-Geometría -Análisis	-Ángulos -Parábola. Tiro parabólico
7. Los Impuestos del Imperio	-Estadística y probabilidad	-Tablas, diagramas y gráficas para representar datos -Tablas de doble entrada
8. La conquista de Germania	-Estadística y probabilidad	-Técnicas de conteo -Combinatoria
9. La carrera hasta Saguntum	-Aritmética -Álgebra	-Cálculo y comparación de datos -Problema móviles

1. TESELAS

En las casas romanas de personajes importantes y en edificios públicos el pavimento se hacía con mosaicos; de figuras geométricas, de animales, de representación de los dioses, etc.

Este que ves es un fragmento de esos mosaicos. Si te fijas un poco no te será difícil ver cuatro cuadrados de diferentes tamaños en él.

El lado del cuadrado más grande de todos tiene 32 teselas (los cuadraditos de piedra con los que está hecho el mosaico).

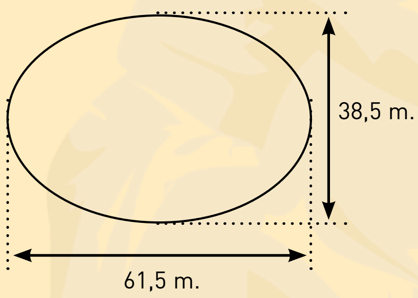
1.1. ¿Cuántas teselas se necesitan para hacer el cuadrado grande?

1.2. Si piensas un poco no te será difícil saber cuántos se necesitarán para construir los otros tres cuadrados.
Para el 2º cuadrado se necesitan........................teselas.
Para el 3er cuadrado se necesitan ....teselas.
Para el 4º cuadrado se necesitan........................teselas.

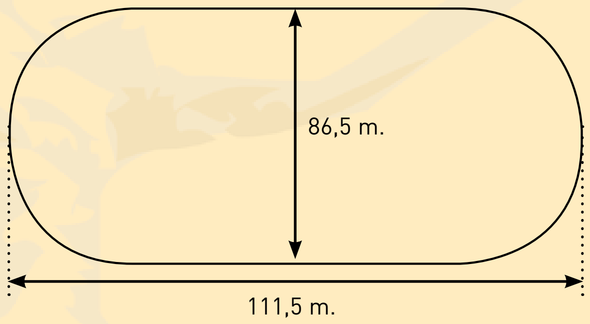
1.3. También habrás observado que hay triángulos de tres tamaños diferentes. ¿Cuántas teselas necesitamos si queremos construir cada uno de esos triángulos?

2. LOS ESPECTÁCULOS

Los romanos eran muy aficionados a los espectáculos públicos. En el anfiteatro realizaban las luchas de gladiadores y en el circo las carreras de cuadrigas. Ambos edificios tenían forma aproximada de elipse. Los dibujos siguientes representan las dimensiones del anfiteatro y el circo de la antigua Tarraco (actual Tarragona).



ANFITEATRO



CIRCO

2.1. Como podrás ver el circo era mucho más grande que el anfiteatro. ¿Cuántos anfiteatros podríamos construir en la parcela que ocupa un circo?

2.2. En la arena del circo se realizaban las carreras de cuadrigas (carros tirados por caballos). Para que te hagas una idea de su tamaño, infórmate sobre las dimensiones del terreno de juego de un campo de fútbol. ¿Cuántos campos de fútbol podríamos construir en la arena del circo?

2.3. Los espectáculos del anfiteatro de Tarraco podían presenciarlos 14.000 personas. ¿Cuántas personas crees que podrían presenciar las carreras en el circo?

2.4. La velocidad máxima que podían alcanzar las cuadrigas de caballos era de 60 km/h. en la recta y de 30 km/h. para dar la vuelta. ¿Cuánto tardaban en dar una vuelta al circo una vez lanzada la carrera?

3. EL PUENTE

Una de las aportaciones más interesantes que hicieron los arquitectos romanos en la península ibérica fue la introducción del arco. Los íberos, que eran los habitantes de la península no lo conocían. Lo utilizaban, por ejemplo, para construir puentes sobre los ríos. Entre los puentes más largos que construyeron los romanos se encuentra el que hicieron en la ciudad de Mérida para cruzar el río Guadiana en el año 25 a.C. y todavía en la actualidad está en uso, aunque muy restaurado.

La longitud total del puente es de 769 metros, su altura de 10 metros. El ancho de los arcos de 6,40 metros y el ancho de los pilares donde se apoyan los arcos de unos 5 metros.

Como los arquitectos romanos también se regían por criterios económicos a la hora de construir, se ahorraron de realizar 5 arcos en la entrada de cada extremo del puente y otros 5 más en el tramo central que se apoya sobre una isla en el Guadiana.

3.1. Realiza tus propios cálculos y averigua cuántos arcos se construyeron en la realización del puente.

3.2. Si un carro de los que utilizaban en la época avanzaba, cuando iba cargado, 4 kilómetros a la hora, ¿cuánto tiempo tardaban en cruzar el puente para entrar a la ciudad?

3.3. Para levantar el puente, utilizaron bloques de piedra (que llamaban sillares) que medían 40 centímetros de ancho, 30 centímetros de alto y 70 centímetros de largo. Si el ancho de la calzada del puente es de 7 metros ¿Qué cantidad de piedra utilizaron en su construcción? ¿Cuántos sillares?

3.4. Cada metro cúbico de la piedra que utilizaron pesaba aproximadamente 3.000 kilogramos. Un camión de tamaño medio en la actualidad carga 20 Toneladas. ¿Cuántos camiones necesitaríamos para trasladar toda la piedra que se necesita para construir el puente?

4. EL TEMPLO

Uno de los edificios singulares presentes en la Roma de Terra Mítica es el llamado Itálica. El nombre de Itálica hace referencia a la ciudad que fundó Publio Cornelio Escipión en el año 206 a.C. en las cercanías de la ciudad sevillana de Santiponce, pero en realidad el edificio es un templo, inspirado en el Templo "Maison Carré" de Nimes (Francia). Normalmente, estos edificios públicos se construían en el foro de la ciudad.

4.1. ¿Cuántas columnas se han utilizado para su construcción? (En el interior no hay columnas, éstas forman el perímetro).

4.2. Como puedes observar en la fotografía, una parte del edificio es cerrada y otra una terraza. ¿Cuántas veces es más grande la parte cerrada que la terraza?

4.3. La escalera de acceso, formada por seis escalones, salva un desnivel de 1,08 metros. ¿Qué altura tiene cada escalón?

4.4. Si hubiéramos construido en lugar de la escalera una rampa de acceso al edificio, ¿qué longitud tendría la rampa para que la pendiente no superase el 12%?

5. CIRCUS MAXIMUS

La entrada del Circus Maximus de Terra Mítica es una réplica de uno de los edificios más emblemáticos del mundo romano: El Coliseo de Roma.

El Coliseo es en realidad el anfiteatro más grande del mundo. Lo empezó a construir el emperador Vespasiano en el año 69 d.C. y lo terminó su hijo Tito en el año 80.

Aunque tiene forma elíptica, a la vista parece que sea un círculo pues mide 188 metros de largo y 156 metros de ancho. La altura de su anillo exterior es de 50 metros (unos 15 pisos). Se utilizaron 10.000 metros cúbicos de mármol travertino para recubrir la fachada y 300 toneladas de hierro para fabricar las grapas que unían los sillares.

A sus gradas podían asistir hasta 60.000 espectadores, la mayoría sentados.

5.1. Imagina que el Coliseo es circular, suponemos que su radio es la media de los semiejes antes mencionados. ¿Qué espesor tenía la capa de mármol exterior?

5.2. Si en cada sillar se colocaban 2 grapas de 200 gramos cada una para sujetarlo con los otros sillares que estaban a su lado, ¿cuántos sillares crees que utilizaron para construir el Coliseo?

5.3. La arena del Coliseo tenía una capa de 5 cm. de grosor. Un carro romano tirado por dos caballos percherones podía cargar hasta 1.300 kilogramos (que aproximadamente equivalen a 1 metro cúbico de arena). ¿Cuántos carros se necesitan para llevar toda la arena al Coliseo?

6. LOS ARQUEROS MATEMÁTICOS

Cuando las legiones romanas se disponían a atacar a las tropas enemigas en primer lugar actuaban los arqueros. Con ellos pretendían diezmar el ejército contrario antes de pasar al combate cuerpo a cuerpo. Para conseguirlo, los arqueros se situaban a 500 metros de distancia de sus enemigos, tensaban sus arcos y soltaban sus flechas a una velocidad de 75 m/seg., pero no todas las flechas alcanzaban su objetivo.

Para perder el menor número de flechas posibles, uno de los arqueros debía decidir con qué ángulo debían de lanzar para que llegasen hasta los enemigos. Contaba con una tabla donde aparecían todas las fórmulas que describen el movimiento de la flecha:

Tiempo de Vuelo	$\dfrac{\textbf{Velocidad inicial x ángulo}^2}{5.000}$
Altura máxima de la flecha	$\dfrac{\textbf{Velocidad inicial}^2 \textbf{ x ángulo}}{1.500}$
Alcance máximo de la flecha	$700 - \dfrac{\textbf{Velocidad inicial}^2 \textbf{ x ángulo}}{1.300}$

6.1. ¿Podrías decir con qué ángulos es posible que los arqueros alcancen su objetivo?

6.2. Dibuja un gráfico que represente el movimiento de la flecha de un arquero que ha lanzado con un ángulo de 60°.

6.3. ¿Cuál es la distancia mínima de seguridad para que no te alcance el arquero con una de sus flechas?

7. LOS IMPUESTOS DEL IMPERIO

Las colonias romanas a lo largo y ancho del Mediterráneo servían para abastecer a la ciudad de Roma de trigo, vino, aceite, lino y esparto. En la época de mayor esplendor romano la capital, Roma, llegó a tener más de medio millón de habitantes que necesitaban de todos esos productos.

A fin de controlar cómo contribuían cada una de ellas, uno de los senadores se encargaba de anotar la carga de cada uno de los barcos que llegaban al puerto de Roma. En la tabla siguiente recogió las cantidades que provenían de las principales ciudades de Hispania.

	Trigo (Tm)	Vino (Hl)	Aceite (Hl)	Lino (Tm)	Esparto (Tm)
Cartago Nova	10	80	20	2	10
Gades	15	90	25	4	12
Saguntum	12	100	16	6	8
Tarraco	14	150	18	5	8
Valentia	9	120	14	6	9

7.1. ¿Qué ciudad necesitó el barco más grande para transportar sus mercancías?

7.2. En realidad los barcos romanos no eran muy grandes, sólo podían cargar un máximo de 40.000 kilogramos en cada viaje. ¿Cuántos barcos necesitó mandar cada ciudad?

7.3. Como al emperador no le gustan mucho los números, el senador debe realizar un gráfico que recoja todos los datos. ¿Cómo lo harías tú? Dibuja el tuyo.

8. LA CONQUISTA DE GERMANIA

Para la conquista de Germania, el emperador Marco Aurelio disponía de 6 legiones con diferentes números de soldados.

	1ª Legión	2ª Legión	3ª Legión	4ª Legión	5ª Legión	6ª Legión
Soldados	1.500	2.000	2.500	2.000	1.750	1.800

Para conseguir el éxito en cada batalla necesitaba enviar a la lucha al menos 4.000 soldados.

8.1. ¿Cuántas batallas podía librar a la vez con posibilidad de éxito?

8.2. Como has podido observar hay más de una manera de enviar las tropas a las batallas. ¿Cuáles son los soldados que tienen más posibilidades de entrar en batalla? ¿Y los que menos?

Tras enviar las cuatro primeras legiones a las dos primeras batallas, el ejército de Marco Aurelio ha sido diezmado quedándose en el campo de batalla uno de cada diez soldados. Los daños en el enemigo han sido mayores y ahora sólo necesitará 3.000 soldados para ganar cada batalla. De nuevo Marco Aurelio se hace las mismas preguntas que antes. ¿Podrías ayudarle?

9. LA CARRERA HASTA SAGUNTUM

La Via Augusta es la calzada romana más larga de toda la Península Ibérica, con un recorrido total aproximado de 1.500 kilómetros desde los Pirineos hasta Cádiz, atravesando la Comunidad Valenciana a lo largo de unos 425 kilómetros. La Via Augusta fue el eje principal de la red viaria en la época de los romanos.

En época del emperador Augusto, recién hechas las reparaciones que mandó realizar en esta Via entre los años 8 y 2 a.C., dos ciudadanos romanos se hicieron una apuesta.

Cornelius pensaba viajar a Saguntum, en Hispania, un viaje de 2.000 kilómetros por la Vía Augusta que partía desde Roma. Iría corriendo a caballo a 40 kilómetros a la hora y sólo descansaría una hora, de cada tres que estuviese montado, para comer y cambiar de caballo y por las noches dormiría ocho horas.

Maximiliano pensaba también viajar a Saguntum, navegando, desde Ostia, el puerto de Roma. Un viaje de 1.500 kilómetros a través del Mediterráneo a una velocidad de 15 km/h. durante todo el día (el barco no duerme, sigue navegando).

Cornelius apostó 5 ánforas de vino a que llegaba antes que Maximiliano con su barco.

9. LA CARRERA HASTA SAGUNTUM

9.1. ¿Quién crees que ganó la apuesta?

9.2. ¿Cuánto tiempo tardó exactamente cada uno de ellos en llegar a Saguntum?

Un día después de que Cornelius saliese de Roma camino de Saguntum su hermano Aurelius, que no conocía su viaje, decidió partir hacia Roma para visitarle. Como él no había hecho apuesta ninguna, decidió que viajaría en caballo, trotando a 25 kilómetros a la hora y que descansaría una hora, de cada tres que estuviese montado, para comer y cambiar de caballo y por las noches dedicaría dos horas para cenar en la taberna y dormiría diez horas.

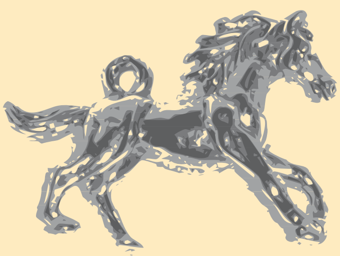
9.3. ¿Cuánto tiempo tardarían en cruzarse los dos hermanos en la Via Augusta?

9.4. ¿A qué distancia de Saguntum se encontraron?

9.5. Cuando se encontraron, ¿qué estaba haciendo cada hermano, descansando, durmiendo o cabalgando a caballo?

IBERIA

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. Juan Martínez Silíceo: Repartos	-Aritmética y álgebra	-Problemas de reparto
2. La Geometría: Savasorda	-Geometría y álgebra	-Ecuaciones y trigonometría
3. El Álgebra: Ben Ezra	-Álgebra y geometría	-Ecuaciones lineales
4. Mosaicos de la Alhambra	-Aritmética y geometría	-Simetrías y Teorema de Pitágoras
5. Un juego medieval: el Morris	-Resolución de proble-mas	-Juegos de estrategia
6. El número cordobés	-Geometría y álgebra	-Triángulos, ecuaciones y trigonometría
7. Monedas en la Edad Media	-Aritmética y álgebra	-Problemas de mezclas
8. La Aritmética: Gaspar Nicolás	-Aritmética y álgebra	-Operaciones numéricas y ecuaciones
9. La barraca valenciana	-Aritmética y álgebra	-Operaciones numéricas y ecuaciones
10. La clepsidra: reloj de agua	-Análisis de funciones	-Funciones recíprocas



1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

A lo largo de la Historia aparece innumerables veces el problema de cómo repartir una cantidad entre varias personas, situación que se daba frecuentemente en el reparto de las herencias y también con los acreedores, cuando la cantidad que reclamaban era superior a lo que el deudor podía pagar. ¿Cómo se efectuaba entonces el reparto? Vamos a ver distintos ejemplos.

Juan Martínez Silíceo (1477-1557) fue unos de los matemáticos españoles que en la primera mitad del siglo XVI enseñaron matemáticas en París. Estudió filosofía, dialéctica, matemáticas y fue profesor de la Universidad de Salamanca. En 1534 el emperador Carlos V le nombró maestro de su hijo Felipe II que entonces tenía 6 años y posteriormente obtuvo el nombramiento de obispo de Cartagena y Cardenal de Toledo.

Escribió varias obras, la más importante de ellas se titula Ars Aritmética y fue publicada en París en 1514, tuvo un gran éxito y se realizaron varias ediciones, una de ellas en Valencia. En este libro, en un tratado dedicado a la regla de tres aparecen dos problemas que te mostramos a continuación, intenta resolverlos, en las soluciones encontrarás cómo los resolvió Silíceo.

1.1. Un hombre enfermo, que tenía a su esposa embarazada, y con un capital de 2.000 escudos, dejó este testamento: si mi mujer da a luz un niño, para él son los tres quintos de mis bienes, para mi mujer un quinto y para la iglesia el resto. Pero si da a luz una niña, esta recibirá dos quintos, mi mujer otros dos quintos y la iglesia el resto. Al llegar el momento, la mujer dio a luz gemelos, un niño y una niña. Pregunta: ¿Cómo se distribuirán los bienes?

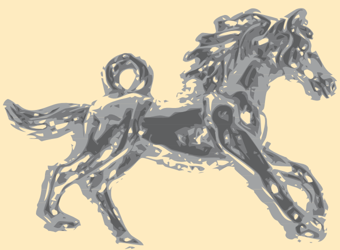
1.2. Hay que dividir mil francos entre tres socios, el primero tendrá el doble que el segundo y el segundo el triple que el tercero. Pregunta: ¿Cuánto tendrá cada uno?

El siguiente ejemplo fue enunciado por el rabino Abraham Ibn Ezra en el año 1140 a.C.

1.3. Un hombre muere dejando cuatro hijos y cuatro herencias. Asigna al primer hijo la totalidad del patrimonio, al segundo la mitad, al tercero una tercera parte y al cuarto una cuarta parte. Evidentemente no hay suficiente para satisfacer los derechos de los cuatro hijos. ¿Cómo se realizará el reparto?

Reparto Proporcional

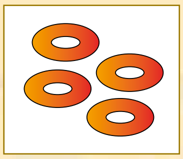
Nosotros utilizamos para resolver estos problemas el **Reparto Proporcional**, según el cuál a cada uno de los herederos le corresponde una fracción del total a repartir que tiene como numerador la parte que debe corresponder a esa persona y como denominador la suma de todas las cantidades reclamadas por los herederos.



1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

Pero no hay una única forma de hacer repartos, nosotros trabajamos con repartos directamente o inversamente proporcionales, pero un autor llamado O'Neill propone los siguientes métodos:

Reparto proporcional con los derechos truncados
Es una versión del reparto proporcional pero con una diferencia: si alguno de los herederos reclama una cantidad mayor que la cantidad a repartir, se le asigna para el reparto la cantidad a repartir.



Vamos a explicarlo con un ejemplo:
Pedro, Juan y Marta han ganado en un concurso 3, 6 y 20 rosquillas cada uno, pero cuando les van a entregar el premio se dan cuenta que sólo tienen 18 rosquillas en total. ¿Cómo las reparten?

Solución:
A cada uno se le asigna para el reparto lo que sea más pequeño entre lo que le corresponde o el total.

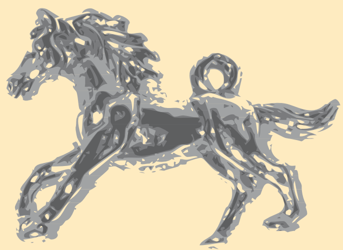
Si llamamos **E** al total y $\mathbf{r_i}$ a lo que le corresponde a cada uno sería: mínimo ($\mathbf{r_i}$, **E**).
- A Pedro, entre 3 y 18 le corresponden 3.
- A Juan, entre 6 y 18 le corresponde 6.
- A Marta, entre 20 y 18 le corresponderán 18.

Ahora hacemos el reparto como antes:

- Pedro: $\frac{3}{3+6+18} \cdot 18 = \frac{3}{27} \cdot 18 = 2$
- Juan: $\frac{6}{27} \cdot 18 = 4$
- Marta: $\frac{18}{27} \cdot 18 = 12$

Hemos repartido las 18 rosquillas: 2+4+12 = 18.

1.4. ¿Te parece más justo este reparto o el reparto proporcional? ¿Cuántas rosquillas le corresponderían a cada uno de los amigos si hubieran hecho un reparto proporcional?



1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

Regla Igualitaria

Es otra forma de repartir en la que se reparte **a partes iguales** el patrimonio entre todos. Esto se expresa matemáticamente $\frac{E}{n}$ donde **E** es el total a repartir y **n** es el número de personas que participan en el reparto.

1.5. En el ejemplo de antes ¿Cuántas rosquillas le corresponden a cada niño si hacemos este reparto?
Esta regla, aunque se llama igualitaria parece poco justa ¿Crees que Pedro, Juan y Marta estarían de acuerdo en este reparto?

Regla Igualitaria Restringida

Esta regla reparte también equitativamente pero evita el problema de que alguien pueda recibir más de lo que le corresponde, como le ocurría a Pedro, que recibía 6 rosquillas cuando le correspondían 3.

Para explicarlo supongamos que a Pedro, Juan y Marta les ha correspondido en una rifa 20, 100 y 200 gusanos de seda respectivamente pero cuando van a hacer el reparto se han escapado unos cuantos y sólo hay para repartir 90.

Si el reparto fuera igualitario, a cada uno le corresponderían, $\frac{90}{3} = 30$ pero Pedro tendría más de los 20 que le han tocado.

Así que asignamos a cada uno el mínimo entre los que le tocan y 30: **Min** $(r_i, 30)$.

A Pedro le corresponderían 20, a Juan 30 y a Marta 30.

Restamos al total los 20 de Pedro y quedan 90 – 20 = 70 que los repartimos entre los otros dos. $\frac{70}{2} = 35$

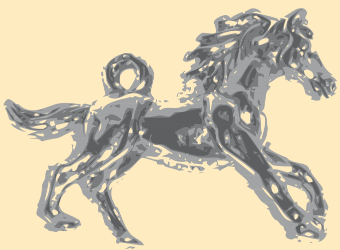
Así, Pedro recibe 20, y Juan y Marta 35 cada uno.

1.6. Imagina ahora que se tienen que repartir 90 manzanas pero a Pedro le corresponden 20, a Juan 25 y a Marta 100. ¿Cuántas manzanas le corresponden a cada uno haciendo el reparto anterior?

Repartos Inversamente Proporcionales

También podemos realizar repartos inversamente proporcionales, intenta resolver el problema siguiente:

1.7. Pedro, Juan y Marta han subido a una tres palmeras y han conseguido entre los tres 300 dátiles. Se los van a repartir de forma que reciba más dátiles el que tiene menos años, es decir, inversamente proporcional a sus edades. Si Pedro tiene 10 años, Juan 15 y Marta 30, ¿Cuántos dátiles le corresponden a cada uno?



2. LA GEOMETRÍA: SAVASORDA

Abraham bar Hiyya (1092-1177), fue un matemático y astrónomo judío. También fue conocido por su nombre latino **Savasorda**, que significa gobernador de ciudad. Fue probablemente educado en el Califato de Córdoba, pero es en Barcelona donde escribió sus obras originales en hebreo.

Conocemos dos obras con contenido matemático:

- **Yesodey ha-Tevuna u-Migdal ha_Emuna**, la primera enciclopedia escrita en hebreo sobre matemática, astronomía, óptica y música.

- **Hibbur ha-Meshiha We-ha Tishboret** (Tratado de medida y cálculo), escrito en 1116 y traducido al latín en 1145 por Platón de Tivoli con el nombre **Liber embadorum**.

Este tratado tenía como objetivo ayudar a los judíos españoles y franceses en el cálculo de medidas de los campos, Encontramos algunas definiciones, axiomas y teoremas de Euclides. También se encuentra una justificación geométrica de una ecuación de segundo grado.

Vas a resolver varios problemas del **Tratado de medida y cálculo**:

2.1. Si del área de un cuadrado quitamos la suma de dos de sus cuatros lados, sobra 21. ¿Cuál es el área del cuadrado y cuál la longitud de cada uno de los lados iguales?

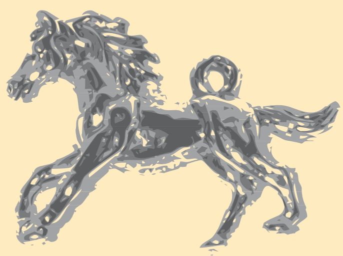
2.2. Dada una cuerda de longitud 6 en un círculo de diámetro $10 + \frac{1}{2}$, descubre la longitud del arco correspondiente a la cuerda.

2.3. Descubre la longitud de una cuerda cuyo arco correspondiente tiene una longitud de $5 + \frac{1}{2}$, en un círculo de diámetro 33.

2.4. Si una cuerda de longitud 8, dista 2 de una circunferencia, descubre el diámetro del círculo.

2.5. En un rectángulo cuya diagonal es 20 y cuya longitud excede en 2 a su anchura, descubre la longitud, la anchura y el área.

2.6. ¿Cuál es la longitud del lado de un rombo, si una diagonal es 16 y la otra 12?



3. EL ÁLGEBRA: BEN EZRA

Rabbi Abraham ben Meir Ezra (1090-1167), fue un judío que nació, probablemente en Toledo y murió posiblemente en Roma. Ezra se dedicó inicialmente a la poesía, pero también tiene trabajos sobre gramática, astrología y matemáticas.

Conocemos varios textos, escritos en hebreo, relacionados con las matemáticas:

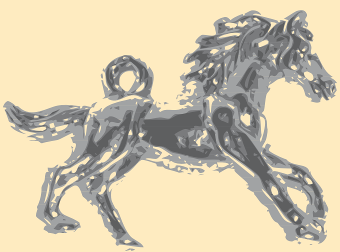
- **Séfer ha-Echad** (El libro de las unidades), donde describe los símbolos hindúes para las cifras del 1 al 9. Ezra utiliza las nueve primeras letras del alfabeto hebreo:

  א. ב. ג. ד. ה. ו. ז. ח. ט.

  Utilizaba el sistema decimal para los números enteros y el sistema sexagesimal para las fracciones.

- **Séfer ha-Mispar** (El libro del número), donde describe el sistema decimal para los números enteros. En este libro utiliza el cero con forma de circunferencia y que designa cono gagal (rueda).

- **Liber augmenti et diminutionis vocatus numerario divinationis**... es probablemente una traducción al latín de un libro suyo; también es atribuido al matemático árabe Ajjub al-Basri. El libro contiene diversos problemas donde se aplica la "regla de doble falsa posición" y está dividido en 7 partes: multiplicación, división, suma, diferencia, fracciones, razones y raíces cuadradas.



3. EL ÁLGEBRA: BEN EZRA

Vas a resolver varios problemas de Liber augmenti:

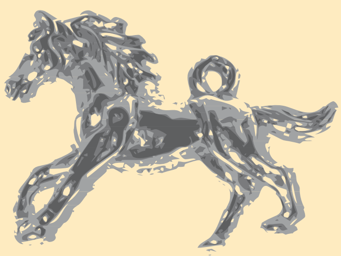
3.1. Capitulum de codem aliud: Un tesoro es aumentado en una tercera parte. Después una cuarta parte de su totalidad y añadida a la primera suma. La nueva suma es 30. ¿Cuál era el tesoro original?

3.2. Capitulum de eodem aliud: Un tesoro es aumentado en una tercera parte y cuatro dracmas. Después una cuarta parte del total es añadida a la primera suma. El resultado es cuarenta.

3.3. Capitulum ejus aliud: Un tesoro es aumentado cuatro dracmas. Después la mitad del total y cinco dracmas es añadida a la primera suma. Después fue aún se aumentó la cuarta parte. El resultado fue de setenta dracmas.

3.4. Capitulum de eodem aliud: Si te dicen que un mercader tiene un cierto dinero y que duplica su dinero y da dos dracmas. Vuelve a duplicar su dinero y da cuatro dracmas. Después vuelve a duplicar su dinero y da ocho dracmas y se queda sin nada. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente?

3.5. Capitulum pomis (Capítulo de los frutos): Un hombre entra en un campo de manzanos que tiene tres guardas y recolecta cierta cantidad de manzanas; encuentra el primer guarda y le da la mitad y dos manzanas; al encontrar al segundo guarda le da la mitad de lo que le queda y dos manzanas; por fin, al encontrar al tercero le da la mitad de lo que aún le queda y dos manzanas; entonces le queda una manzana. ¿Cuántas manzanas recolectó?



4. MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

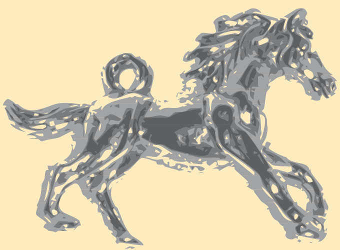
Se llama mosaico a todo recubrimiento del plano mediante piezas llamadas teselas que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir y en el que los ángulos que concurren en un vértice deben de sumar 360 grados. Existen muchas formas de obtener un mosaico. Los más sencillos están formados por un único tipo de polígono regular, como el triángulo equilátero, el cuadrado o el hexágono regular.

También es posible conseguir mosaicos utilizando como tesela algún polígono irregular, como triángulos, cuadriláteros e incluso algún pentágono equilátero pero no equiángulo.

Combinando dos o más polígonos regulares pueden obtenerse también mosaicos, siempre y cuando la distribución de los mismos en cada vértice sea la misma. Es decir, podemos obtener figuras formadas por varios polígonos regulares que combinados convenientemente juntos forma una tesela, con la que podremos recubrir el plano.

Una curiosa forma de construir mosaicos vistosos y originales es mediante transformaciones de teselas poligonales que se convierten en formas abstractas, animales, hojas, etc. Los nuevos motivos mantienen la propiedad de seguir recubriendo el plano, las figuras se obtienen recortando una o varias partes del polígono base para colocarlas mediante traslaciones o giros en otro lado. Esta última técnica, junto con otras, fue utilizada en la construcción de los mosaicos nazaríes. La dinastía nazarí, descendiente de **Yusuf ben Nazar**, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. La Alhambra y Granada en general vivieron entonces una época de esplendor que ha quedado reflejada en sus construcciones. La transformación de un polígono regular en otra figura de igual superficie produjo formas desconocidas hasta entonces en la historia del Arte.

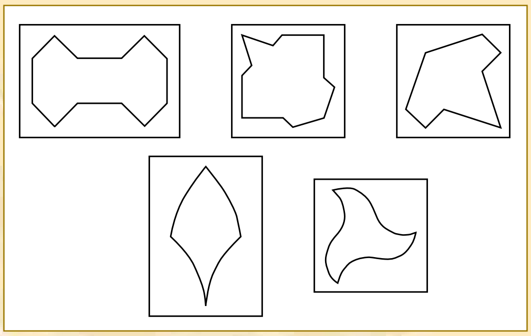
Los conocimientos geométricos y técnicos de los artistas islámicos de esta época han sido fuente de inspiración para innumerables artistas, como el famoso dibujante y pintor holandés M. C. Escher.



4. MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

A continuación te proponemos la construcción y estudio de cinco de los mosaicos nazaríes más conocidos: la pajarita, el avión, el pez volador, la escama y el hueso.

4.1. Para conseguir las teselas del hueso, el avión, el pez volador y la escama se ha partido de un cuadrado. ¿Qué transformaciones se han hecho para conseguirlas? Supón que el cuadrado tiene 8 cm. de lado.



Para la tesela de la pajarita se parte de un triángulo equilátero.

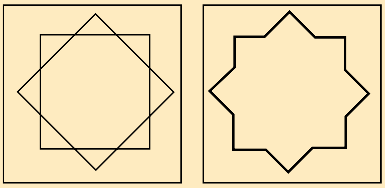
4.2. Consigue recubrir el plano con ellas. ¿Qué transformaciones (traslaciones, giros, etc.) has de hacer a la pieza base para poder acoplarlas unas al lado de las otras?

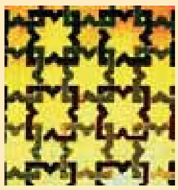
4.3. Ya que el cuadrado utilizado tiene de lado 8 cm. determina el perímetro del hueso, el avión y el pez volador.

4.4. Indica los ejes de simetría de cada una de las teselas dibujadas.

4.5. Diseña tus propias losetas utilizando cuadrados y triángulos. ¿Qué técnica hay que utilizar en cada caso?

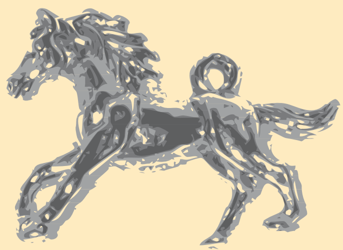
4.6. Otros mosaicos tienen su origen en el solapamiento de polígonos. Combinando cuadrado y rotación se crea una estructura que reina en la Alhambra sobre todas: el **sello de Salomón**.





a) Indica todas las simetrías de la figura central.
b) Si el lado del cuadrado mide 8 cm. determina el perímetro y el área.

4.7. Construye basado en el sello de salomón, mediante repetición, algún motivo ornamental.

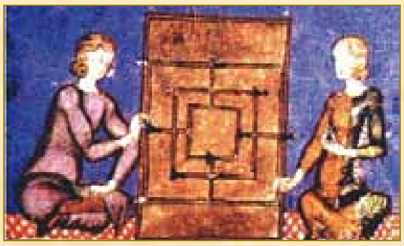


5. UN JUEGO MEDIEVAL: EL MORRIS

Se han encontrado tableros del juego en el antiguo Egipto (1400 a.C.) y en Sri Lanka (100 d.C.). También en el barco vikingo de Gokstad (900 d.C.). Se ha especulado sobre si los griegos o los fenicios introdujeron el juego en el norte de Europa, mientras hay quien opina que fueron los árabes a través de España los introductores del juego a través del sur de Europa.

Lo que si es cierto que en el **Libro de los Juegos** producido bajo la dirección de Alfonso X el Sabio (1221-1284) aparecen las reglas e ilustraciones del tablero del morris.

Este libro es una recopilación de todos los juegos conocidos hasta entonces. Alfonso X supervisó el trabajo conjunto de judíos, musulmanes y cristianos que produjeron una serie de textos sobre historia, astronomía, religión,... y ¡juegos!



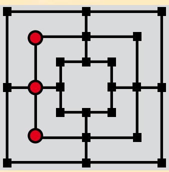
El JUEGO DEL MORRIS DE 9

Número de jugadores: Dos.
Número de fichas: Nueve para cada jugador.
Objetivo: Eliminar el mayor número de fichas del adversario.
Origen del juego: Antiguo Egipto antes de 1400 a.C.

REGLAS DE JUEGO

I. Cada jugador dispone de nueve fichas de diferente color que van colocando alternativamente sobre el tablero. Se sortea quien inicia la colocación de las fichas.

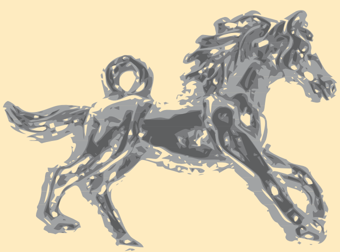
II. Una vez colocadas todas las fichas mueven una ficha cada vez a un lugar adyacente vacío siguiendo una línea del tablero.



III. Cada jugador intenta formar una fila de tres fichas a lo largo de cualquier línea del tablero (se conoce como forma un "molino").

IV. Si lo consigue captura la ficha que quiera del adversario y la saca del tablero.

V. Pierde el jugador que quede con dos fichas solamente o queda bloqueado sin poder mover.

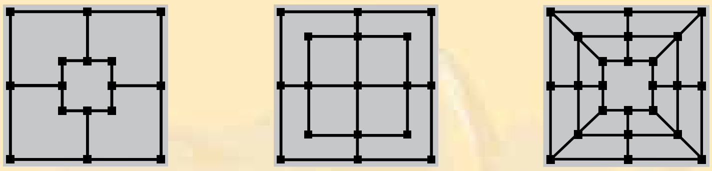


VI. Cuando un jugador ha capturado todas las piezas del contrario, la partida ha terminado y ha ganado.

5. UN JUEGO MEDIEVAL: EL MORRIS

JUEGO DEL MORRIS DE 5, DE 7 Y DE 12

Estas variantes del juego siguen las mismas reglas pero, como indica su nombre, utilizan un número diferente de fichas.



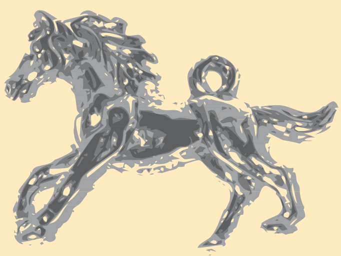
5.1. Juega con tu compañero o compañera varias partidas con los diferentes tipos de "Morris".

Para cada uno de los diferentes tableros de Morris contesta a las preguntas siguientes:

5.2. a) ¿Hay un movimiento de apertura óptimo?
b) ¿Cuántas son las posiciones posibles después de que cada jugador haya hecho un movimiento?
c) ¿Cuál es el máximo número de fichas que puede haber sobre el tablero sin que se forma ningún "molino"?

5.3. Si los lados de los cuadrados de los tableros son de longitud 1, 2 y 3 cm., ¿cuál será la longitud total de las líneas del tablero?

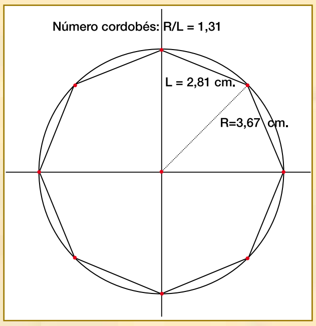
5.4. Si una hormiga tuviera que recorrer todas las líneas del tablero, partiendo de una posición arbitraria, ¿cuál sería el camino más corto a seguir en cada uno de los tableros?



6. EL NÚMERO CORDOBÉS

Igual que el número aúreo aparece en infinidad de situaciones: en la naturaleza, en arquitectura, etc., hay otro número mucho menos conocido pero que también está presente en determinadas construcciones geométricas.

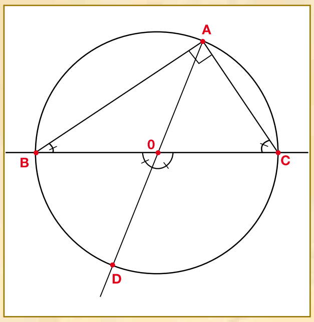
Así como el número de oro es la proporción entre el lado del decágono regular y el radio de la circunferencia circunscrita, el número cordobés relaciona el lado de octógono regular con el radio de la circunferencia circunscrita:



Al ser más fácil construir un octógono regular que un pentágono, dicha proporción se utilizó tanto en obras pictóricas como arquitectónicas.

El nombre proviene del uso que se hizo de él en la construcción de la mezquita de Córdoba, mediante la utilización del arco de herradura. También fueron utilizados, por la cultura andalusí el llamado el arco de herradura apuntado.

El arquitecto español Rafael de la Hoz Arderius, considerando las últimas técnicas de medición obtenidas del **papiro de Rhind** indica que entre las diagonales de un rectángulo con esa proporción encaja perfectamente la **Gran Pirámide** de Egipto.



6.1. Demuestra que si un triángulo inscrito en una circunferencia tiene a la hipotenusa como diámetro es un triángulo rectángulo.

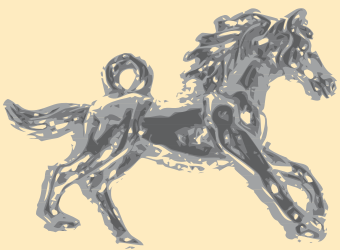
a) ¿Cómo son los triángulos OBA y OCA?
b) Si llamas α=OBA y β=OCA, a dos ángulos de los triángulos, ¿cuánto vale el ángulo BAC?
c) Calcula los ángulos BOD y COD y justifica que el triángulo es rectángulo.

6.2. Vas a obtener el valor del número cordobés, que es el número irracional:

$$C=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Para ello, observando la figura, vas a ir contestando a las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo es el triángulo OMN? Aplica el teorema de Pitágoras y expresa MN en función del radio R.

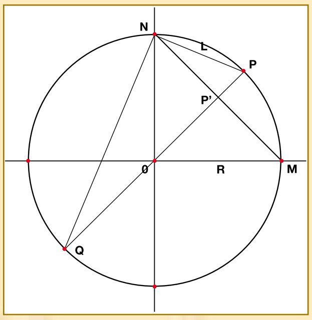


b) Justifica que OP'=MN/2.
El teorema del cateto dice "En un triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella".

6. EL NÚMERO CORDOBÉS

c) En el triángulo NPQ que es rectángulo aplica el teorema del cateto para calcular L (lado del octógono regular).

d) Obtén el valor de $C = \frac{L}{R}$



6.3. Vas a determinar sobre la recta real el número cordobés:

a) Construye una circunferencia de radio **OA =** $\sqrt{2}$.

b) Dibuja la bisectriz del ángulo COA, ¿Por qué mide 22,5°?

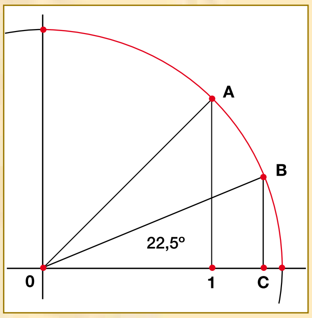
c) Demuestra que OC mide le número cordobés

$$C = \sqrt{2}\cos\left(\frac{45}{2}\right)$$

d) En trigonometría se cumple la fórmula:

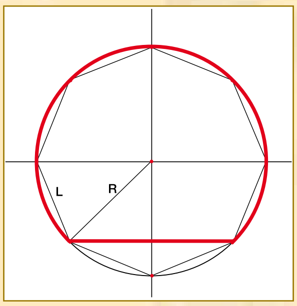
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

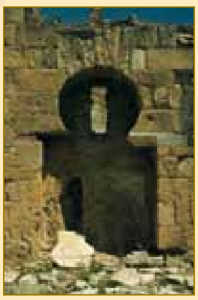
Deduce la expresión $C = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.



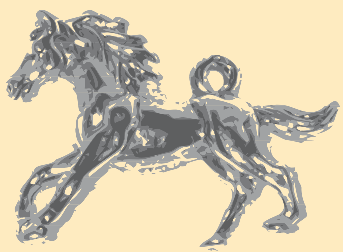
6.4. Encuentra que el número cordobés es una solución de la ecuación: $2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

6.5. Si dibujas un octógono regular y trazas el arco correspondiente a sus seis lados superiores obtienes el arco cordobés o más conocido como arco de herradura.





Haz el dibujo correspondiente y calcula el perímetro y el área encerrada.



7. MONEDAS EN LA EDAD MEDIA

El trueque fue la primera forma de llevar a cabo los intercambios comerciales.

Luego llegó la llamada "moneda natural", una mercancía preciada, aunque abundante, cuyo valor estaba más o menos convenido: sal, ganado, herramientas, armas... Poco a poco, las primeras piezas metálicas realmente consideradas como monedas evolucionaron en su diseño hasta llegar a su forma circular.

Aunque la acuñación de moneda en la península Ibérica se remonta al siglo III a.C. analizaremos lo que ocurre en España durante la Baja Edad Media.

Se utiliza universalmente monedas de oro y plata, puesto que estos eran metales preciosos muy valorados y precisamente por eso cumplían las necesidades de un sistema monetario: el alto valor de cambio del oro y la plata significaba que algo muy costoso ocupaba poco espacio, lo que contribuía a facilitar el transporte y almacenaje, y aumentaba su utilización en el comercio internacional o entre regiones muy distantes.

Muchas monedas se fabricaban en plata pura, pero como era tierna y blanda realizaron aleaciones con otros metales, como el cobre, así, la ley de una moneda es la proporción de metal precioso que contiene en relación con su peso total.

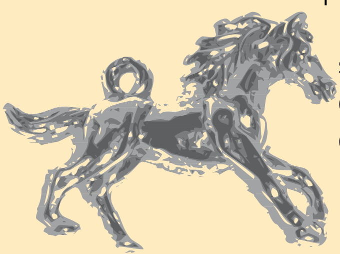
Actualmente la ley de la plata se mide en milésimas, y lo que llamamos "plata de ley" designa una plata de 925 milésimas, es decir, que de cada 1.000 unidades de aleación, 925 son de plata pura. La plata de Ley contiene un 92,5% de plata pura.

En la época medieval, la Ley de la plata se medía en dineros y granos. La plata pura tenía 12 dineros. Una plata de ley 1 dinero tenía una parte de plata y 11 de cobre, es decir, la ley de la plata indicaba la parte de las 12 de plata y el resto era de cobre. Una plata de ley 5 dineros tendría 5 partes de plata pura y 7 de cobre.

Posteriormente aparecieron algunos divisores del dinero: el grano, la meaja y la pujeza, que tenían las siguientes equivalencias:

1 dinero eran 24 granos
1 meaja eran 12 granos es decir, $\frac{1}{2}$ dinero
1 pujeza eran 6 granos o $\frac{1}{4}$ de dinero

Las monedas empezaron a devaluarse y la Ley pasó a expresarse en dineros y granos. Por ejemplo, una plata de ley 10 dineros y 8 granos tendría si lo expresamos en granos de un total de 12 x 24 = 288 granos. Una cantidad de plata de 10 x 24 + 8 = 248 granos. Tendría una cantidad de plata pura de 86,11%, es decir 86,11%.



7. MONEDAS EN LA EDAD MEDIA

Los Reyes Católicos establecieron que la Ley mínima para la plata tenía que ser de 11 dineros y 4 granos.

7.1. Averigua qué proporción de plata pura contenía. ¿Es mayor o menor que la que contiene actualmente la plata de Ley?

La fabricación de monedas en la Edad Media era una de las actividades industriales más prestigiosas, y los maestros que las hacían necesitaban conocer cómo calcular las proporciones de la aleación. Por ello, en los libros de aritmética de la época aparecían problemas sobre aleaciones para enseñar estos conceptos.

A continuación te proponemos unos problemas que aparecen en el libro en castellano de aritmética comercial más antiguo que se conoce y que es el manuscrito número 46 de la colegiata de san Isidoro de León.

7.2. Si te dicen que el rey manda labrar a 7 dineros de ley y tenemos dos platas, una de ley de 11 dineros y otra de ley de 2 dineros, ¿qué proporción tomarías de cada una de las dos platas para formar la aleación de 7 dineros?

Intenta tú resolver el problema, si no lo consigues esta es la solución explicada que aparece en el texto:

Si de 7 resta 2, quedan 5 y coloca el 5 debajo del 11; por otra parte, si de 11 restas 7, quedan 4 y coloca el 4 debajo del 2.

Como 5 + 4 = 9, la respuesta es que para fabricar 9 marcos de plata de ley de 7 dineros tiene que tomar 5 marcos de ley de 11 dineros y 4 marcos de ley de 2 dineros.

	7	
11		2
5		4

$$t = 6 - \sqrt{H}$$

7.3. Si tenemos plata de ley de 12 dineros ¿qué plata y qué cobre tomaremos para obtener una aleación de 6 dineros?

7.4. Si te dicen que el rey manda labrar a ley de 5 dineros y 4 granos y tenemos plata de 7 dineros y 5 granos ¿cuánto cobre tendremos que mezclar para que venga aleado a ley de 5 dineros y 4 granos?

7.5. Se combinan 4 lingotes de plata de leyes diferentes, 1 lingote de 5 marcos y ley de 9 dineros, otro de 6 marcos y ley de 8 dineros, otro de 7 marcos y ley de 9 dineros y uno de 8 marcos y ley de 3 dineros. ¿Cuál es la ley de la mezcla?

8. LA ARITMÉTICA: GASPAR NICOLÁS

Gaspar Nicolás fue un autor importante en el panorama de la aritmética portuguesa del siglo XVI. Los datos sobre su vida son escasos, pero su obra nos revela un matemático notable y un innovador imaginativo de la aritmética. A él se deben por ejemplo las primeras referencias al célebre matemático italiano Paccioli y también el primer esfuerzo para introducir en Portugal el sistema de notación árabe.

El libro más antiguo consagrado en Portugal a la Aritmética tiene por título **Tratado da prática Darismetica**, y fue publicado por primera vez en 1519, su autor era Gaspar Nicolás. En España, antes de aparecer en Portugal el libro de Gaspar Nicolás, habían sido publicados los tratados de Aritmética de Ciruelo, Juan de Ortega y Siliceo, sería interesante comparar estos libros con el del autor portugués.

Comienza este tratado con algunos capítulos en los que aparecen reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir números enteros y fraccionarios, para extraer raíces cuadradas de números enteros y para sumar progresiones. Siguen después numerosos problemas de los que el autor da las soluciones, empleando para ello la regla de tres, la regla de la falsa posición, etc. Algunos de estos problemas son de utilidad práctica, otros son interesantes curiosidades numéricas.

A continuación te proponemos algunos de los problemas que aparecían en este libro:

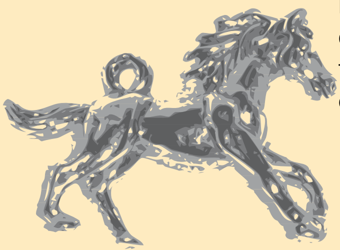
8.1. Un quintal de clavo vale 100 cruzados, uno de canela 60 y uno de jengibre 40. Llega un mercader que quería tanto de una especia como de otra pero sólo podía pagar 350 cruzados en total. ¿Qué cantidad comprará de cada especia?

8.2. Una pila tiene cuatro caños, destapando el primer torno se vacía en 6 horas. Tapando el primer torno y destapando el segundo se vacía en 5 horas y volviendo a tapar este y destapando el tercero se vacía dicha pila en 4 horas. Si tapamos el tercero y destapamos el cuarto se vacía la pila en tres horas. Ahora me pregunto, destapando a la vez los cuatro tornos, ¿en cuántas horas estará dicha pila vacía?

La mayor parte de las aritméticas publicadas en Europa a partir del siglo XIII contenían un problema de este tipo. Tenemos a continuación otra versión del problema que también aparece en el libro de Gaspar Nicolás:

8.3. Una nave va desde Lisboa hasta la isla de Madeira con las tres velas que tiene, usando sólo la vela más pequeña tardará en llegar a la isla tres días. Si utiliza para navegar la segunda vela, que es un poco mayor, tardará en llegar a Madeira 2 días, y si utiliza sólo la vela mayor, tardará en llegar a la isla 1 día. Ahora me pregunto, desplegando todas las velas y estando siempre el mar y el viento de la misma manera, ¿en cuántos días estará la nave en dicha isla?

8.4. Si te dijeran que un hombre quiere hacer una torre de piedra y un pedrero promete hacerlo en 3 días, otro pedrero promete hacerla en dos días y un tercero en un día. El señor de la torre manda que los tres trabajen juntos en la torre para hacerla en un tiempo más breve. Ahora me pregunto ¿en cuánto tiempo estará hecha dicha torre?



8. LA ARITMÉTICA: GASPAR NICOLÁS

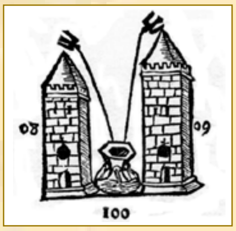
La influencia del comercio marítimo llevó a muchos autores a presentar diferentes versiones de los mismos problemas como las que realizó Gaspar Nicolás. Estos problemas aparecen en las aritméticas europeas medievales y de la época renacentista y así mismo en los libros escolares del siglo XXI.

En el libro Aritmetica práctica de 1604 del español Jerónimo Cortés aparece el siguiente problema:

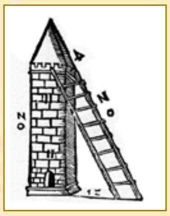
8.5. Si cuatro flamencos beben 10 cántaros de vino en 3 días y cinco españoles beben 20 cántaros en 6 días, se pregunta, bebiendo todos juntos, ¿en cuántos días acabarán un barril de 60 cántaros?

A continuación te proponemos unos cuantos problemas que también aparecen en el libro de Gaspar Nicolás y que podrás resolver usando el Teorema de Pitágoras:

8.6. **Las dos torres y la fuente.**
Dos torres, de alto respectivamente 90 y 80 brazas, están separadas una de la otra por una distancia de 100 brazas. Entre ambas torres hay una fuente en tal lugar que dos aves que están colocadas cada una encima de una de las torres, se lanzan desde su torre al tiempo y llegan a la vez a beber a la fuente. ¿A qué distancia está situada la fuente de cada una de las torres?

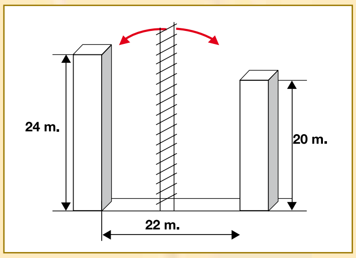


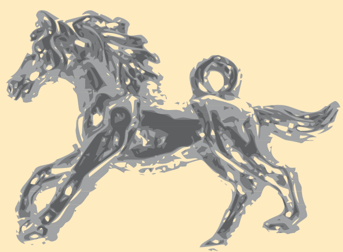
8.7. **La torre y la escalera.**
Una escalera tiene 20 brazas de alto y está apoyada sobre una torre que también mide 20 brazas. El pie de la escalera se encuentra a 12 brazas de distancia de la base de la torre. ¿Cuánto le falta a la escalera para llegar a la cima de la torre?



8.8. **El árbol quebrado.**
Un árbol de 50 brazas está al pie de un río de 30 brazas de ancho, pero un rayo cae sobre él y lo rompe de tal forma que la copa del árbol va a parar a la otra orilla del río. ¿Por dónde se quebró el árbol?

8.9. **La escalera entre las dos torres.**
Dos torres que miden de alto respectivamente 20 y 24 metros, están separadas una de otra por una distancia de 22 metros. ¿En qué lugar entre las dos torres debe colocarse una escalera para que cuando la apoyemos en cualquiera de las dos torres llegue a la cima? ¿Cuánto debe medir la escalera de alto?





9. LA BARRACA VALENCIANA

La feraz huerta valenciana, que se extiende a lo largo de la costa, desde Carcagente hasta Sagunto, tiene zonas, como la de La Albufera, de características muy acusadas. La vivienda rural es la barraca, y en ella podemos distinguir los siguientes tipos: la barraca de huertanos, en la huerta propiamente dicha; la de pescadores, en la playa, y en La Albufera las dos modalidades.

El clima de Valencia y la fertilidad de sus tierras permiten varias cosechas al año, con un sistema de explotación intensiva que precisa una constante atención. Este es el motivo de que el huertano construya su vivienda al pie de su parcela, empleando, casi únicamente, con sentido de la máxima economía, los materiales que brinda la naturaleza: cañas, barro, juncos y carrizos.

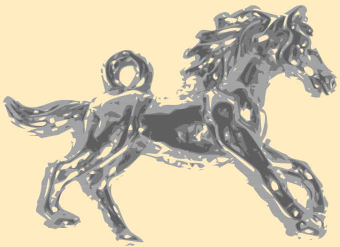
La barraca de la huerta responde a un tipo muy definido, que apenas ha sufrido variación con el paso del tiempo. Es de planta rectangular, de unos 9 x 5,50 m., y cubierta a dos aguas con caballete perpendicular a la fachada —casi siempre orientada al mediodía—, que está en uno de los lados menores.

La distribución es siempre parecida: una puerta, situada a un lado de la fachada, da acceso a un amplio paso, que recorre toda la longitud de la barraca y termina con otra puerta en la fachada opuesta, para facilitar la circulación de aire. Este corredor sirve de cocina, estancia y almacén de aperos.

En la otra crujía se distribuyen los dormitorios, generalmente tres. Al desván o andana, que antiguamente se destinaba a la cría de gusanos de seda, se sube por una escalera de mano.

Las paredes, de unos 2,50 m. de altura, se hacen con adobes, llamados gasons, que se colocan en asta entera o en media asta, según la economía que se persiga.

La cumbrera de la cubierta se remata con una cruz de madera en cada extremo. De este remate en cruz se ha escrito que, en el siglo XVI, pregonaba la calidad de cristianos viejos de los moradores de la barraca, frente a las habitadas por moriscos. Pero no hay pruebas suficientes para mantener esta teoría y, al parecer, se trata simplemente de un símbolo piadoso.



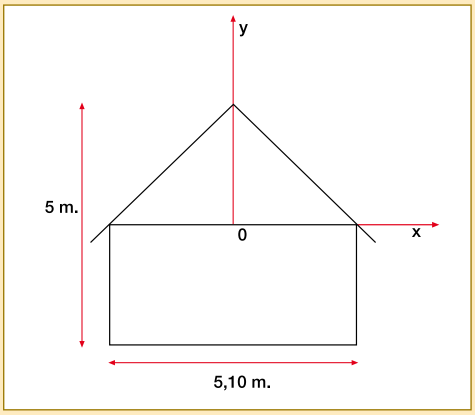
9. LA BARRACA VALENCIANA

9.1. En las afueras de la ciudad donde vive Pedro hay una barraca muy antigua. Según le han informado a Pedro, la barraca es de planta rectangular y tiene una superficie de 4.590 dm^2 además, se sabe que su longitud excede en 3,9 m. a su anchura. Con estos datos, averigua las dimensiones de la barraca.

9.2. El propietario de la barraca ha decidido embaldosarla con baldosas cuadradas.
a) ¿Cuál puede ser el mayor tamaño de las baldosas?
b) ¿Cuántas baldosas necesitará?
Nota: haz uso del resultado anterior.

9.3. El propietario también ha decidido pintarla. Para pintarla puede recurrir a un pintor que tardaría tres horas en hacer el trabajo o a un aprendiz que tardaría el doble. Si el propietario decide llamar a los dos para que trabajen juntos a la vez,
a) ¿Cuánto tiempo emplearán los dos en el trabajo?
b) Otra pareja de pintores (formada por un jefe y un aprendiz) tardaría 3 horas en pintar la barraca, si se sabe que el aprendiz tarda 1 hora más que el jefe, ¿cuántas horas tarda el aprendiz?

9.4. Teniendo en cuenta la figura, calcula las ecuaciones de las rectas que representan el suelo, las paredes laterales y el alerón del tejado de la barraca. Nota: ten en cuenta la situación del sistema de referencia. La altura del suelo a la andana es de 2,5 m.



10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

La necesidad de saber la hora aún en los días nublados y por la noche, preocupó ya desde muy antiguo. Los relojes de agua se basaron en la regularidad del descenso de la superficie de un líquido contenido en un recipiente con un orificio pequeño de salida donde la velocidad de salida depende de la presión en el fondo del recipiente.

Amoutons fue el primero que construyó uno de estos relojes. Los egipcios emplearon estos relojes pero ya perfeccionados, pues tenían una polea y una cadena en la que sus extremos estaban unidos uno al flotador y el otro a un contrapeso. También utilizaron dos recipientes. Platón introdujo el reloj de agua en Grecia, en el año 157 a.C.

Clepsidra proviene del vocablo latino clepsydra, que a su vez deriva del griego klepsydra, compuesta de hydro (agua) y klepto (yo robo). La idea es que el recipiente inferior roba el agua (o la arena) del superior.

Solían estar formados por dos recipientes, de manera que el recipiente inferior recogiera el agua que salía del otro. Supongamos que los recipientes son cilíndricos.

La velocidad de salida de un líquido depende, además de la sección del agujero, de la altura del agua (ley de Torricelli).

Para una "clepsidra" cilíndrica de base dada, el tiempo de vaciado es función de la altura del agua de acuerdo con la fórmula,

$$t = \frac{1}{k}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H}\right)$$

siendo k un parámetro que mide la sección del agujero de salida.

10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

10.1. Si con H en cm. y t en minutos, es la función para una clepsidra determinada se pide:

a) ¿Qué altura inicial tiene el agua? ¿Cuánto tarda en vaciarse?

b) Expresa **H=f(t)** y representa la función.

10.2. Si en la ecuación de la clepsidra hacemos k=2. ¿Qué ocurre? ¿Por qué? Encuentra **H=f(t)** y represéntala.

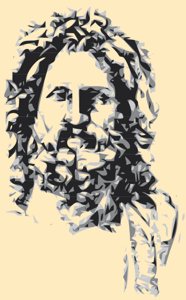
10.3. ¿Cuánto habrá que aumentar el volumen inicial para que con este mayor agujero de salida tarde lo mismo en vaciarse. Encuentra la fórmula **H=f(t)** y represéntala.

10.4. Encuentra las fórmulas de **t=f(H)** y **H=f(t)** para una clepsidra de altura 64 cm. se vacíe en 20 minutos. Represéntalas conjuntamente. ¿Cómo son sus gráficas?

- Puedes utilizar el programa DERIVE para hacer las representaciones gráficas.

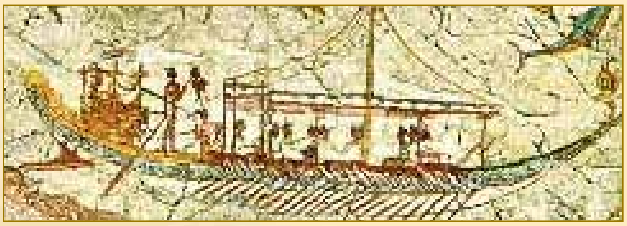
LAS ISLAS

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS		
ACTIVIDAD	**BLOQUE**	**CONTENIDOS**
1. Un viaje complicado	-Aritmética y álgebra	-Operaciones con fracciones -Ecuaciones de primer grado
2. Kouros y Kores	-Geometría -Análisis	-Simetrías en el plano -Coordenadas cartesianas
3. La Esfinge	-Aritmética y álgebra	-Progresiones aritméticas
4. Una cena muy especial	-Aritmética y álgebra	-Ecuaciones de segundo grado -Lenguaje algebraico
5. Un barco diferente	-Aritmética y álgebra -Geometría	-Área de un triángulo -Área de un sector circular -Magnitudes directamente proporcionales
6. El Megarón	-Aritmética y álgebra -Geometría	-Área de la superficie de un cilindro y de un cono -Magnitudes directamente proporcionales
7. Cuando el río suena	-Análisis	-Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines -Interpretación de gráficas
8. ¿Quién ganará?	-Estadística	-Cálculo de la media aritmética y la desviación típica de una distribución unidimensional -Diagrama de sectores
9. Nos vamos a la guerra	-Probabilidad	-Frecuencia y probabilidad de un suceso -Cálculo de probabilidades mediante la Ley de Laplace -Estrategias para contar
10. La Herencia	-Aritmética y álgebra -Geometría -Análisis	-Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas -Ecuación de la recta -Áreas de figuras planas
11. El favor de los dioses	-Aritmética y álgebra	-Lenguaje algebraico -Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

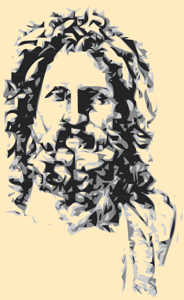


1. UN VIAJE COMPLICADO

Desde el puerto de la isla de Creta parte un barco cargado de cerámica dispuesto a entablar relaciones comerciales con la isla de Sicilia. Esta isla era el país de los Cíclopes, horribles gigantes con un solo ojo en medio de la frente. Los marineros, que desconocían este hecho, desembarcan tranquilamente y son atacados por Polifemo, cíclope hijo de Poseidón (deidad del mar), el cual devora un tercio de la tripulación.

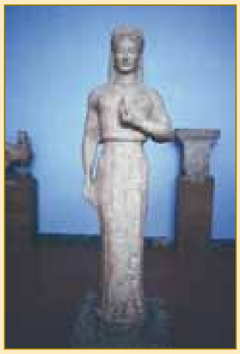


Ante la merma de la tripulación, deciden regresar a casa, haciendo escala en una isla para abastecerse de agua y alimentos, con el infortunio de que la isla elegida resultó ser la isla de Las Sirenas. Éstas, con su canto, atraían a las naves, de tal manera que se estrellaban contra las rocas y devoraban a los marineros. De nuestra tripulación consiguieron hipnotizar a un cuarto de la tripulación que quedaba, con lo que regresaron a la isla de Creta sólo 75 marineros. ¿Cuántos partieron del puerto?



2. KOUROS Y KORES

Los Kouros y las Kores son algunas de las representaciones más significativas del estilo arcaico griego. Los Koures representaban atletas desnudos con ojos abultados y cabellera en zig-zag. Las Kores representaban mujeres completamente vestidas con un característico peinado de trenzas largas y pelo ondulado.



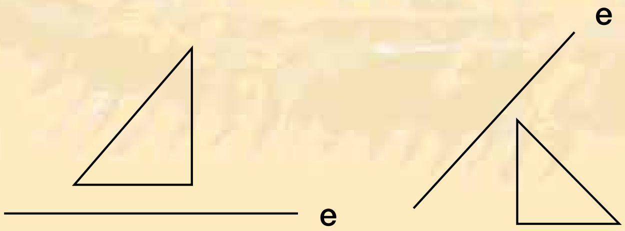
Eran figuras rígidas basadas en la simetría, que manifestaban un hieratismo en la expresión y en su momento estaban pintadas.

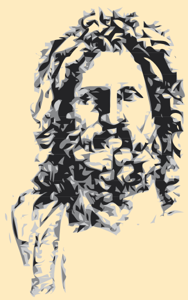
Los habitantes de estás islas han demostrado grandes habilidades en el cálculo de la simetría.

2.1. a) Halla y representa los puntos simétricos del (4,3), (0,5), (-3,2), (-3,0) y (7,-5) respecto del origen, del eje OX y del eje OY.

b) ¿Podrías decir en qué cuadrante está el punto simétrico del (-5,-4) respecto del origen, sin representarlo gráficamente?

c) Construye la figura simétrica de cada una de las siguientes respecto del eje **e**:





3. LA ESFINGE

Se creía que la Esfinge era un monstruo femenino al que se le atribuía rostro de mujer; pecho, patas, y cola de león; y además tenía alas como un ave de rapiña. La esfinge estaba situada en una roca a la entrada de Tebas, y desde allí devoraba a todos los viajeros que no eran capaces de resolver sus enigmas. Edipo fue el único capaz de superar el reto.

El primero que le planteó fue: ¿Cuál es el ser que anda primero con cuatro patas, luego con dos, y después con tres patas? La respuesta es el Hombre, pues gatea cuando niño, camina de adulto y de viejo anda con bastón.

El segundo fue: Hay dos hermanas una de las cuales engendra a la otra, y ésta a su vez engendra a la primera. La respuesta al segundo son el día y la noche, pues el día en griego es femenino.

La Esfinge, ante la respuesta de Edipo, desesperada se arrojó al vacío.

Ahora debes ser tú el que resuelva el enigma que te presentamos:

3.1. "Un comerciante de Creta comenzó su fortuna con 50 monedas de oro. Cada semana consiguió 15 monedas más que la semana anterior. ¿Cuántas monedas tendrá después de 7 semanas? ¿Y después de 20 semanas? ¿Y después de un año? ¿Y después de **n** semanas?

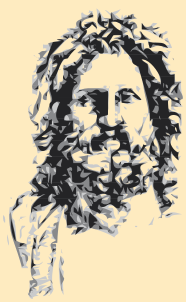
4. UNA CENA MUY ESPECIAL

Ulises era el rey de Ítaca, estaba casado con Penélope y era padre de Telémaco. Tras su victoria en la guerra de Troya decide volver a su hogar. Sin embargo, los dioses le habían reservado innumerables sorpresas a lo largo de su viaje, haciendo que éste durase diez años.

Este relato lo conocemos como "La Odisea" de Homero.

A la vuelta de su largo viaje, Penélope decide homenajear a su marido con una gran cena. Ella le pregunta cuánta gente quiere que asista y Ulises le contesta: "el producto del número de invitados por su tercera parte más el doble de su sexta parte debe ser igual a dos".

4.1. ¿Sabrías decirle a Penélope cuánta gente se sentará a la mesa a cenar?

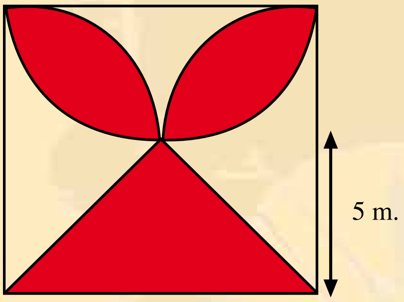


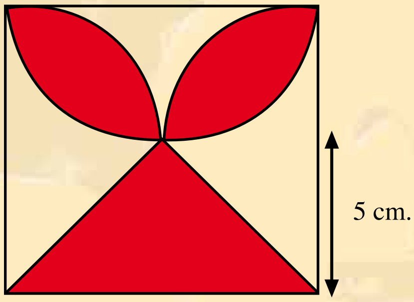
5. UN BARCO DIFERENTE

Las Cícladas son un grupo de islas que antiguamente comprendían las islas de Andros, Delos, Milo, Naxos, Paros, Kéa, Kithnos, Mikonos, Sérifos, Sifnos, Siros y Tínos. Este grupo era considerado un círculo en cuyo centro se encontraba la isla sagrada de Delos.

Los habitantes de estas islas desarrollaron el comercio marítimo como principal medio de subsistencia, vendiendo piezas de arcilla, piedra o metal a zonas tan importantes como Creta, Ática, Peloponeso y Asia Menor.

Los marineros de Mikonos les han pedido a sus mujeres que les hagan una vela para su barco. Sólo han puesto la condición de que ésta sea cuadrada y tenga de lado 10 metros. Ellas, que son muy imaginativas, han decidido hacer el siguiente dibujo:

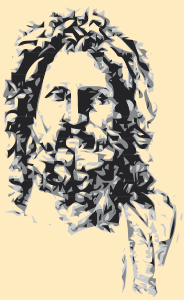




Además, para poder divisarles cuando regresen lo van a pintar de rojo. Si el litro de pintura les cuesta 3 monedas y gastan medio litro para tintar cada metro cuadrado:

5.1. a) ¿Cuántos litros de pintura deben comprar?

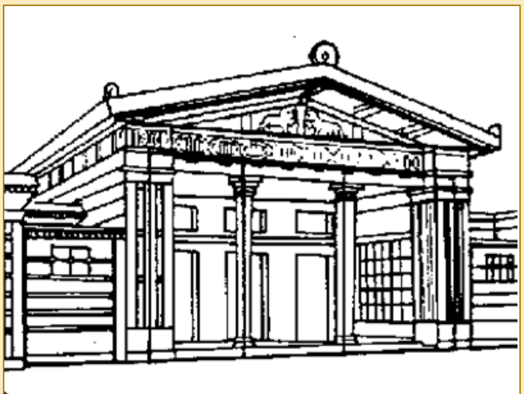
b) ¿Cuántas monedas les quedarán si entre todas lograron reunir 90?



6. EL MEGARON

Las habitantes de la antigua Grecia fueron grandes arquitectos.

El Megaron de Tirinto, que data del siglo XXII a.C., es un buen resumen de las construcciones de la civilización micénica.



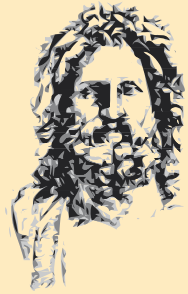
Reconstrucción del Megaron de Tirinto

Es un edificio de planta rectangular, que quizás dispuso de dos pisos, y en el que las proporciones guardan una relación prácticamente constante.

Nosotros también podemos demostrar que somos grandes arquitectos. Queremos recubrir con pan de oro toda la superficie del remate de un palacio con base cilíndrica y encima de él un cono. El perímetro de la circunferencia del cilindro es de 8 m. y la altura total del remate es de 15 m., correspondiendo la mitad a cada figura geométrica.

6.1. a) ¿Cuántos metros cuadrados de pan de oro deberemos comprar?

b) Si nos dicen que nos venden sábanas de pan de oro de 8 m^2, ¿cuántas deberemos comprar?



7. CUANDO EL RÍO SUENA

Jasón era hijo de Ersón rey de Yolcos. Pelias despojó a su hermanastro Ersón de su reino y éste viendo a su hijo en peligro, lo envió con el centauro Quirón, que lo crió y lo educó. Cuando Jasón creció, volvió a Yolcos y reclamó a su hermano su legítimo reino. Pelias le prometió concedérselo si le traía el Vellocino de Oro.

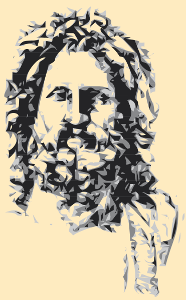
Jasón decidió embarcarse en Argos e ir a buscar el Vellocino de Oro. En el viaje, tanto él como su tripulación (conocidos como los argonautas, por el nombre del barco), pasaron por múltiples aventuras, hasta que consiguieron tan preciado tesoro.

En una de las escalas que realizaron en el viaje, los argonautas tuvieron que remontar un río con aguas aparentemente tranquilas. Durante el primer kilómetro, que tardaron media hora en recorrer, las aguas fueron mansas, pero, a partir de ahí, comenzaron 2 kilómetros de rápidos. El primer kilómetro lo hicieron en tres cuartos de hora, descansaron durante 15 minutos y realizaron el siguiente kilómetro en media hora, hasta llegar a su destino.

7.1. a) ¿Serías capaz de dibujar la función que representa esta aventura de los argonautas?

b) Indica los elementos más significativos de la función.

c) Halla, si puedes, la expresión analítica de la función resultante.



8. ¿QUIÉN GANARÁ?

Es sabido que los griegos eran grandes atletas y que los ganadores de las pruebas obtenían importantes premios y el reconocimiento por parte de toda la sociedad.

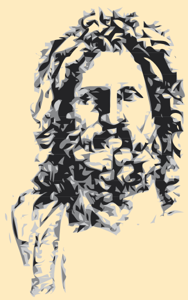
Entre las Islas Cícladas han decidido realizar una competición como divertimento de sus habitantes. En la prueba de lanzamiento de disco se han registrado las siguientes puntuaciones en metros:

Andros	Delos	Milo	Naxos	Paros	Kéa	Kithnos	Mikonos	Sérifos	Sífnos	Siros	Tínos
50,5	49,3	47	48,9	50,3	49	50,2	48	49,8	48,1	48,5	47,6

8.1. a) ¿Por término medio, a cuántos metros son capaces de lanzar el disco?

b) Realiza un diagrama de sectores con los distintos lanzamientos, agrupándolos en 4 intervalos.

c) ¿Cuál es la desviación de los lanzamientos?



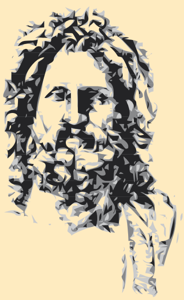
9. NOS VAMOS A LA GUERRA

Troya dominaba el estrecho de los Dardanelos, que comunica el Mediterráneo con el Mar Negro. Debido a su situación geográfica, Troya llegó a convertirse en un obstáculo para los micénicos, que basaban su economía en una fructífera actividad comercial. Ante esta situación, se decide acabar con Troya. Después de una guerra cruenta, que duró diez años, Troya quedó destruida.

Ante el inminente comienzo de la guerra de Troya, Ulises recluta soldados. Se presentan 200 hombres, de los cuales hay 73 expertos en tiro con arco, 111 en espada, 81 en lucha libre, 22 en espada y lucha libre, 23 en tiro con arco y espada, 27 en tiro con arco y lucha libre, y, por último, 7 expertos en las tres artes.

9.1. a) ¿Cuántos expertos hay sólo en espada? ¿Y en lucha libre? ¿Y en tiro con arco?

b) Escogido un soldado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sólo sea experto en espada?



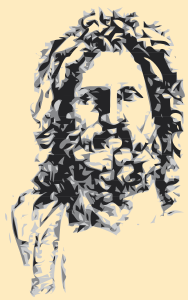
10. LA HERENCIA

La civilización minoica poseyó una sólida base económica, con una agricultura y ganadería muy productivas. Así mismo, su sociedad presentaba una gran especialización laboral; existían agricultores, herreros, orfebres, tejedores, etc.

Cada familia poseía una parcela de tierra que trabajaba para sí misma.

Una de estas familia quiso repartir una parcela de tierra rectangular en herencia entre sus dos hijos. Sólo uno de ellos pretendía dedicarse en exclusiva a la agricultura, mientras que el otro, experto orfebre, sólo quería un pedazo de tierra para consumo propio. La parcela mide 40 metros por 35 metros y si se hace coincidir los lados de la parcela (en horizontal) con unos ejes de coordenadas, ésta queda repartida según la siguiente ecuación $y = x + 20$.

10.1. ¿Cuántos metros cuadrados le correspondió a cada hijo?



11. EL FAVOR DE LOS DIOSES

Pese a los dones de los dioses, la raza humana no hallaba el favor de Zeus, padre de todos los dioses, pues la consideraba demasiado influenciada por los vicios y las pasiones. Fue entonces cuando decidió sepultarla bajo las aguas. Solamente Deucalión, hijo de Prometeo, y su esposa Pirra, fueron considerados suficientemente virtuosos para escapar de este horrible castigo.

Así, Deucalión construyó un gran arca de madera y se metió en ella con su esposa. Iniciado el diluvio, el arca navegó a la deriva durante nueve días y nueve noches hasta que, por fin, alcanzó la cima de un monte de Tesalia.

Deucalión y Pirra solicitan a los dioses tener compañeros para repoblar la tierra, para lo cual, Zeus les aconseja que arrojen “los huesos de su madre” detrás de ellos. Deucalión descifró el mensaje, lanzó detrás de él piedras, y de éstos “huesos de la Tierra” (Madre universal), nacieron los hombres, y de las piedras que arrojó Pirra las mujeres.

Si al cabo de un minuto se tiene que: la suma del triple del número de piedras lanzadas por Deucalión y el doble de las piedras lanzadas por Pirra es 19; y la suma del quíntuplo de las piedras lanzadas por Deucalión más las piedras lanzadas por Pirra es 20, ¿serías capaz de averiguar cuántos hombres y mujeres “nacieron” durante este primer minuto?

1. REPARTIENDO PANES

1.1. 710 : 40 = ? equivale a ¿? x 40 = 710:

El resto, 30, no está en la columna. Por eso hemos de continuar con divisiones.

1	40
2	80
4	160
8	320
16	640
—	—
1/2	20
1/4	10

No se sigue con la duplicación porque el doble de 640 superaría a 710

710 = 640 + 70 = 640 + 40 + 30 = 640 + 40 + 20 + 10. Ahora, 640 + 40 + 20 + 10 = 710, por tanto, la solución es 16 + 1 + 1/2 + 1/4 = 17 + 1/2 + 1/4 = 17,75, es decir, 710 : 40 = 17,75

2. REPARTOS PROPORCIONALES

2.1. 100:12= ¿? equivale a ¿?x12=100:

1	12
2	24
4	48
8	96
1/3	4

Como 96 + 4 = 100 entonces, 100 : 12 = 8 1/3, es decir, cada uno de los ocho marineros recibiría 8 1/3 panes pero, los dos más importantes recibirían el doble, o sea, 16 2/3 panes.

2.2. Si 16 hombres reciben su ración y los cuatro restantes reciben el doble, supondremos que hay 24 hombres entre los que repartir los 320 panes. Calculemos entonces 320 : 24, que equivale a ¿? x 24 = 320:

SOLUCIONES

1	24
2	48
4	96
8	192
—	—
1/3	8

No se sigue con la duplicación porque el doble de 192 superaría al resultado 320. Se continúa el método mediante divisiones (1/2, 1/3, 1/4,...)

Luego el resultado de la división será la suma de los correspondientes valores de la 1ª columna, 8 + 4 + 1 + 1/3 = 13 + 1/3 = 13,3333, es decir, 320:24=13,3333. Esto quiere decir que cada uno de los 16 trabajadores recibiría 8 + 1/3 panes pero, que los 4 restantes recibirían el doble, habría que multiplicar por dos esta cantidad para obtener lo que recibirían estos personajes: 2 x (8 + 1/3) = 16 + 2/3 panes.

3. LA SOMBRA DE LA PIRÁMIDE

3.1. Mide 146 m.

4. MÁS ALTURAS

5. DE PIRÁMIDES Y VOLÚMENES

5.1. $A_{LATERAL} = 85.854,4\ m^2 = 3.139,10$ **setat**
$A_{TOTAL} = 138.754,4\ m^2 = 5.073,29$ **setat**

5.2. $V_{PIRAMIDE} = 2.592.100\ m^3 = 27.001.041,67$ **jars**. Para llenarla se necesitarán aproximadamente 260 camiones cisterna de una capacidad de 10.000 litros.

6. PIRÁMIDES TRUNCADAS

6.1. $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{h}}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{12}{3}(64 + 40 + 25) = 516$

7. ¿CONOCE EL FARAÓN EL NÚMERO π?

7.1. Si Área (círculo de 4 m. de diámetro) = Área (cuadrado de lado $\frac{8}{9}$ de 4 m.) Será: $\mathbf{A}_{\text{círculo}} = (\frac{8}{9}\cdot 4)^2 = (\frac{32}{9})^2 = \frac{1.024}{81}$ $\mathbf{m}^2 \approx 12{,}642$ m^2

7.2. Con la fórmula; $\mathbf{A}_{\text{círculo}} = \pi\mathbf{r}^2$; $\mathbf{A}_{\text{círculo}} = \pi\cdot 2^2 = 4\pi \approx 12{,}567$ m^2

Error relativo = $\dfrac{\textbf{Error absoluto}}{\textbf{valor real}} = \dfrac{12{,}642 - 12{,}567}{12{,}567} = \dfrac{0{,}075}{12{,}567} =$

0,006 = 0,6%

8. VOLUMEN DE UN GRANERO

8.1. Círculo de radio r$\rightarrow$ $\mathbf{A}_{\text{círculo}} = \pi\mathbf{r}^2$.

Cuadrado de lado 8/9 de 2r$\rightarrow\mathbf{A}_{\text{cuadrado}} = (\frac{8}{9}\cdot 2\mathbf{r})^2 = (\frac{16}{9})^2\cdot\mathbf{r}^2 = \frac{256}{81}\cdot\mathbf{r}^2$

Igualando ambas expresiones, $\pi\mathbf{r}^2 = \frac{256}{81}$

$\mathbf{r}^2 \rightarrow \pi = \frac{256}{81} = 3{,}16049$

8.2. $V_{\text{escriba}} = (9 - (9 \times 1/9)) \times (9 - (9 \times 1/9)) \times 10 = 640$ **codos cúbicos.**
$V_{\text{real}} = \pi\mathbf{r}^2 h = 636.17$ **codos cúbicos.**

8.3. Círculo de radio 1 m.:

$\mathbf{A}_{\text{círculo}} = \pi\mathbf{r}^2 = \pi\cdot 1^2 = \pi \approx 3{,}14$ $\mathbf{m}^2$
$\mathbf{L}_{\text{circunf.}} = 2\pi\mathbf{r} = 2\cdot\pi\cdot 1 = 6{,}28$ **m.**
$\dfrac{\mathbf{A}_{\text{círculo}}}{\mathbf{L}_{\text{circunf.}}} = \dfrac{3{,}14}{6{,}28} = 0'5$

Cuadrado circunscrito (lado = 2 m.):

$\mathbf{A}_{cuadrado} = l^2 = 2^2 = 4\ \mathbf{m}^2$

$\mathbf{P}_{cuadrado} = 4 \cdot l = 4 \cdot 2 = 8\ \mathbf{m.}$ $\dfrac{\mathbf{A}_{cuadrado}}{\mathbf{P}_{cuadrado}} = \dfrac{4}{8} = 0'5$

8.4. Círculo de radio r:

$\mathbf{A}_{círculo} = \pi\mathbf{r}^2$

$\mathbf{L}_{circunf.} = 2\pi\mathbf{r}$

$$\frac{\mathbf{A}_{círculo}}{\mathbf{L}_{circunf.}} = \frac{\pi\mathbf{r}^2}{2\pi\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{2}$$

Cuadrado de lado 2r:

$\mathbf{A}_{cuadrado} = l^2 = (2\mathbf{r})^2 = 4\mathbf{r}^2$

$\mathbf{P}_{cuadrado} = 4 \cdot l = 4 \cdot 2\mathbf{r} = 8\mathbf{r}$

$$\frac{\mathbf{A}_{cuadrado}}{\mathbf{P}_{cuadrado}} = \frac{4\mathbf{r}^2}{8\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{2}$$

9. ECUACIONES MUY ANTIGUAS

9.1. $\mathbf{x} + \frac{1}{7}\mathbf{x} = 19$, donde $\mathbf{x} = 16\frac{5}{8}$

9.2. $\mathbf{x} + \frac{1}{4}\mathbf{x} = 15$, donde $\mathbf{x} = 12$.

10. UNA DE FRACCIONES

10.1. Para la primera descomposición de 3/4 = 1/2 + 1/5 + 1/n la solución es n = 20, y para el segundo caso en que 3/4 = 1/2 + 1/6 + 1/n la solución es n = 12.

10.2. La solución es 1/8.

SOLUCIONES

1. UNA GRAN MUJER MATEMÁTICA: HIPATIA DE ALEJANDRÍA

1.1. 45 años.

1.2. No, las mujeres no tenían derecho a la educación...

1.3. -FILÓSOFA / TEÓN / MUSEO / MATEMÁTICAS, GEOMETRÍA, ASTRONOMÍA, LÓGICA, FILOSOFÍA Y MECÁNICA / DIOFANTO

O								A		
T	F	G	E	O	M	E	T	R	I	**A**
N	I	M			O	E	S	U	M	
A	L		E						O	
F	O			C					N	
O	S				A	C	I	G	O	**L**
I	O		T	E	O	N			R	
D	F						I		T	
F	I	L	O	S	O	F	A	C	S	
S	A	C	I	T	A	M	E	T	A	**M**

2. LOS JUEGOS OLÍMPICOS

2.1. Desde 776 a.C. hasta 393 d.C., comprenden 1.169 o 1.170 años aproximadamente según se considere si existió año 0 o no.

2.2. Como hemos hecho notar en la lectura, antiguamente los Juegos Olímpicos ya se realizaban cada cuatro años, por tanto, se realizaron 292 ediciones de los juegos olímpicos, sin más que realizar la correspondiente división.

2.3. Hasta diciembre de 2003, han transcurrido 107 años, lo que nos permitiría calcular que se habrían desarrollado 26 ediciones de Los Juegos Olímpicos, y además el próximo año, 2004, sería la vigésimo séptima edición de dichos juegos; pero hemos de recordar que los Juegos Olímpicos se interrumpieron debido a las Guerras Mundiales, así tenemos:

SOLUCIONES

Orden	Ciudad	Año	Orden	Ciudad	Año
1.	Atenas	1896	12.	Roma	1960
2.	París	1900	13.	Tokio	1964
3.	Saint Louis	1904	14.	México	1968
4.	Londres	1908	15.	Munich	1972
5.	Estocolmo	1912	16.	Montreal	1976
6.	Amberes	1920	17.	Moscú	1980
		1924	18.	Los Ángeles	1984
7.	Ámsterdam	1928	19.	Seúl	1988
		1932	**20.**	**Barcelona**	**1992**
8.	Berlín	1936	21.	Atlanta	1996
		1940	22.	Sydney	2000
		1944	23.	Atenas	2004
9.	Londres	1948	24.	Pekin	2008
10.	Helsinki	1952	25.	Londres	2012
11.	Melbourne	195			

2.4. Debido a la falta de continuidad, debemos definir una función a trozos, así si llamamos: x: edición de los Juegos Olímpicos Modernos ($\mathbf{x} \geq 1$) y: año

$$\begin{cases} y = 1892 + 4\mathbf{x} & \text{si} \quad 1 \leq \mathbf{x} \leq 5 \\ y = 1912 + (\mathbf{x} - 5)8 & \text{si} \quad 6 \leq \mathbf{x} \leq 9 \\ y = 1948 + 4\,(\mathbf{x} - 9) & \text{si} \quad \mathbf{x} \geq 10 \end{cases}$$

2.5. Los Juegos Olímpicos se organizaron en España en su vigésima edición: **Olimpíadas de Barcelona 1992**

Año	1980	1984	1988	1992	1996
Ciudad	**Moscú**	**Los Angeles**	**Seúl**	**Barcelona**	**Atlanta**
Países	80	140	159	169	198
Eventos	203	221	237	257	268
Deportes	21	21	23	23	53
Hombres	4.092	5.230	6.279	6.659	7.000
Mujeres	1.125	1.567	2.186	2.708	3.750

SOLUCIONES

Por tanto:

	Participantes	Incremento
Moscú 1980	5.217	....
Los Ángeles 1984	6.797	30% aprox.
Seúl 1988	8.465	24% aprox.
Barcelona 1992	9.367	11% aprox.
Atlanta 1996	10.750	15% aprox.

Año	**1980**	**1984**	**1988**	**1992**	**1996**	**2000**
Ciudad	**Moscú**	**Los Ángeles**	**Seúl**	**Barcelona**	**Atlanta**	**Sydney**
Oro	1	1	1	13	5	3
Plata	3	2	1	7	6	3
Bronce	2	2	2	2	6	5

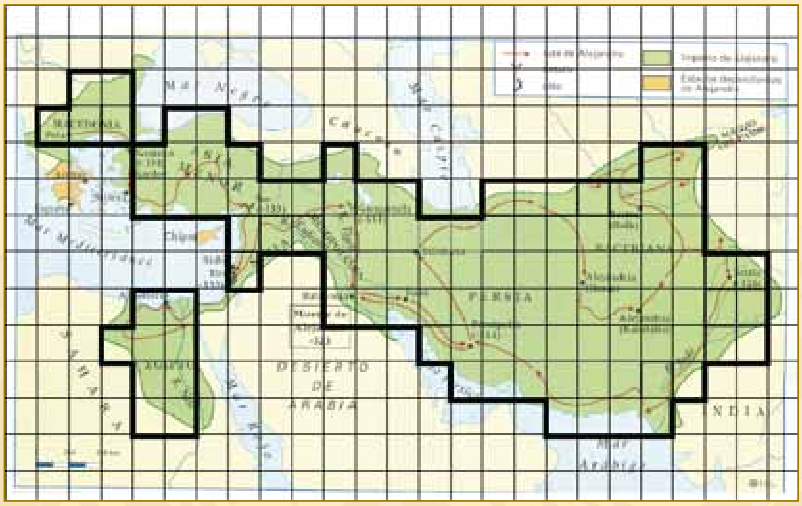
2.6. En todos los casos se ha producido un incremento y hemos indicado en la tabla anterior los porcentajes aproximados.
A lo largo de estas cuatro ediciones de Los Juegos Olímpicos, el índice de variación que se ha producido será: 2.0577 aprox.

2.7. Podemos observar que se produce una gran variación de las medallas entre las ediciones celebradas.

2.8. Se podría representar por medio de varios gráficos: diagrama de barras, histograma según cada clase de medallas, diagrama de sectores donde cada sector representaría una edición diferente pero en este no se diferenciaría el tipo de medalla logrado sino la totalidad de medallas.
El alumno deberá elegir su gráfica según el estudio que desee realizar y obtener alguna conclusión a partir de ella.

SOLUCIONES

3. ALEJANDRO EL CONQUISTADOR



3.1. Gránico -334 Muere -323 dif= -323 –(-334)= 11 años.

3.2. 1 cm. representa 500 km.
500 km $= 5\cdot10^2\cdot10^3$ m. $= 5\cdot10^2\cdot10^3\cdot10^3$ cm. $= 5\cdot10^8$ cm.
Por tanto: "escala 1: $5\cdot10^8$"

3.3. Cada cuadradito tiene de lado 250 km. y de área $250^2 = 62.500$ km^2 vamos a hacer una aproximación contando los cuadritos. Tenemos 106, 106×62.500 km$^2 = 6.625.000$ km^2

4. LOS NÚMEROS MÁGICOS DE LA ESCUELA PITAGÓRICA

4.1. a_n= {1 3 6 10 15 21 28 36 45......}

2 3 4 5 6 7 8 9

1 1 1 1 1 1 1

Es una progresión aritmética de segundo orden

4.2. $a_{10} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$ o bien $S_{10} = \frac{(1+10)\cdot 10}{2} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$

4.3. $a_n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$

4.4. $a_n = \{ 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45 \ldots\}$ $39=36+3$ $55=46+6+3$

4.5. $a_n + a_{n+1} = \{ 1; 4; 9; 16; 25; 36; \ldots \}$ cuadrados perfectos.

4.6. $a_n = \{ 1; 4; 9; 16; 25; 36; \ldots \}$ $a_n = n^2$

4.7. 1 3 5 7 9

2 2 2 2 $a_n = a_1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$

5. HASTA EN LA TUMBA OS DARÉ QUE PENSAR

$\rightarrow X$

$\rightarrow \frac{X}{6}$

$\rightarrow \frac{X}{6} + \frac{X}{12}$

$\rightarrow \frac{X}{6} + \frac{X}{12} + \frac{X}{7}$

$\rightarrow \frac{X}{6} + \frac{X}{12} + \frac{X}{7} + 5$

$\rightarrow \frac{X}{6} + \frac{X}{12} + \frac{X}{7} + 5 + \frac{X}{2}$

$\rightarrow \frac{X}{6} + \frac{X}{12} + \frac{X}{7} + 5 + \frac{X}{2} + 4$

$\rightarrow \frac{X}{6} + \frac{X}{12} + \frac{X}{7} + 5 + \frac{X}{2} + 4 = X \rightarrow X = 84$ años

SOLUCIONES

2º Ciclo de la E.S.O. Matemáticas, Grecia

6. CÓMO COGER A UN LADRÓN

Si ambas coronas estaban hechas con la misma cantidad de oro y plata, debían desplazar la misma cantidad de agua luego la corona del platero no tenía las cantidades de oro y plata entregadas por el rey.

6.1. Volumen oro = masa / densidad = $\frac{1.000 \text{ g.}}{19,3 \text{ g/cm}^3} = 51,8134 \text{ cm}^3$

Volumen plata = masa/ densidad = $\frac{500 \text{ g.}}{10,5 \text{ g/cm}^3} = 47,6190 \text{ cm}^3$

$V = V_{oro}+V_{plata} = 99,43 \text{ cm}^3$

6.2. $V_{oro} = \frac{1.500 \text{ g.}}{19,3 \text{ g/cm}^3} = 77,72 \text{ cm}^3$

6.3. $V_{plata} = \frac{1.500 \text{ g.}}{10,5 \text{ g/cm}^3} = 142,86 \text{ cm}^3$

6.4. Entre el a y el c le puso más plata que oro.

9. EL CURIOSO DE ARQUESTRATO

9.1. La razón es 1:30

9.2. $\overline{AC} = \frac{298,56 \cdot 30}{24}$ Codos

10. CRUCIGRAMA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		D			P				F		S	
2	P	I			E	U	C	L	I	D	E	S
3		V			N				D		M	
4	H	I	P	A	T	I	A		I		E	
5		S			A		U		A		J	
6	P	I	T	A	G	O	R	A	S		A	F
7		B			O		E			D	N	I
8		L			N		O				Z	
9	R	E	S	T	O			S	E	L	A	T

SOLUCIONES

1. TESELAS

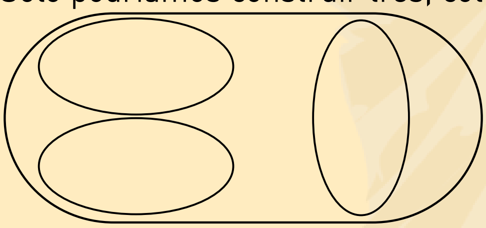
1.1. Necesitarían 32·32 = 1.024 teselas

1.2. El área de cada uno de los siguientes cuadrados es la mitad del anterior.
Para el 2º cuadrado se necesitan 512 teselas.
Para el 3er cuadrado se necesitan 256 teselas.
Para el 4º cuadrado se necesitan 128 teselas.

1.3. Los triángulos son la cuarta parte de los cuadrados 2º, 3º y 4º.
Para el 1er triángulo se necesitan 256 teselas.
Para el 2º triángulo se necesitan 64 teselas.
Para el 3er triángulo se necesitan 32 teselas.

2. LOS ESPECTÁCULOS

2.1. Sólo podríamos construir tres, colocados como indica el dibujo:



2.2. Para partidos nacionales la dimensión del campo de fútbol mínima es de 90 metros de largo por 45 de ancho y en internacionales de 100 por 64. En cualquier caso, aunque el circo es casi el doble que los campos para competiciones nacionales, sólo cabe uno.

2.3. Podemos obtener el aforo realizando múltiples comparaciones, aunque la más razonable parece la del perímetro, que es donde se sitúan los asientos:

- El perímetro de ambos supuestos circunferencias de diámetro $\frac{\mathbf{D+d}}{2}$, arrojaría un aforo de $\frac{310{,}86}{157} \cdot 14.000 = 27.720$ personas.
- La diagonal mayor arrojaría un aforo de $\frac{111{,}5}{61{,}5} \cdot 14.000 = 25.382$ personas.
- La diagonal menor arrojaría un aforo de $\frac{86{,}5}{38{,}5} \cdot 14.000 = 31.454$ personas.

En realidad el aforo del circo solía ser el doble que el del anfiteatro de una misma ciudad.

2.4. Aquí pueden haber multitud de respuestas. Podrían aproximar la longitud de una vuelta con el perímetro de un rectángulo; en los lados largos (223 m.) va a 60 km/h. y en los cortos (173 m.) a 30 km/h. Tardarían entonces 34,14 segundos en dar una vuelta. Otros alumnos quizás piensen que como al salir de la curva van a 30 km/h. y deben ir acelerando hasta 60 y después ir frenando hasta conseguir los 30 para dar de nuevo la curva, promedien que su velocidad en ese tramo es de 45 km/h.; en tal caso obtendrían 38,60 segundos. Si conocen las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado también las podrían utilizar. Todas las soluciones que nos planteen serán válidas, siempre que expliquen el porqué de sus decisiones.

3. EL PUENTE

3.1. En primer lugar debemos quitar los tres trozos de puente que no tienen arcos. En cada uno de ellos se ahorraron 5 arcos. Cada arco ocupa 6,40 metros + 5 metros del primer pilar de apoyo (el segundo apoyo es común con el segundo arco). Un tramo de 5 arcos tiene una longitud de 11,40 metros x 5 + 5 metros del último apoyo = 62 metros. Los tres tramos miden en total 186 metros y nos quedan 583 metros de puente con arcos divido en dos tramos. Restando los 10 metros que miden los dos últimos apoyos de cada tramo quedarían 573 metros de puente y cada arco ocupa en total 11,40 metros, luego tiene 50 arcos.
Si no tenemos en cuenta los últimos apoyos obtendríamos 52 arcos.

3.2. Tardaría 0,19225 horas; es decir, 11 minutos y 32 segundos.

3.3. De nuevo aquí las soluciones son múltiples. El caso más sencillo sería suponer que el puente tiene un volumen de 769 x 10 x 7 = 53.830 m^3 y necesitaríamos 640.834 sillares. Un número más cercano a la cantidad real lo obtendríamos restando "los agujeros" de los arcos. Como se aprecia en la foto su altura son algo más de la mitad, supuestos 7 metros de altura y que tenemos 50 arcos, el volumen de piedra es de 38.150 m^3; es decir, 454.167 sillares.

3.4. Si hemos calculado el volumen sin contar los arcos, necesitaríamos 5.723 camiones.

4. EL TEMPLO

4.1. Como dice que en el interior no hay columnas y suponiendo que la parte que no vemos es igual a la que vemos habrán 24.

4.2. Comparando el número de columnas que ocupan cada una, la parte cerrada es dos veces y media más grande que la terraza.

4.3. Se aprecian 6 escalones, cada uno tiene por tanto 18 cm. de altura (que es la altura estándar de un escalón).

4.4. Si desconocen las razones trigonométricas, por semejanza de triángulos calculamos $\mathbf{L} = \frac{100 \cdot 1,08}{12} = 9$ metros.

5. CIRCUS MAXIMUS

5.1. Suponemos que el mármol cubre toda la fachada (existen los huecos de los arcos, pero los pilares y el arco también están recubiertos de mármol). Si el alumno elige descontar los "agujeros" de los arcos obtendrá un mayor grosor.

SOLUCIONES

Si consideramos que tiene un diámetro de $\frac{\mathbf{D + d}}{2} = 172$ metros, la superficie del Coliseo es de 27.004 m^2,y obtendríamos un espesor de 37 cm.

5.2. $\frac{300.000 \textbf{ Kg.}}{0{,}4 \textbf{ Kg.}} = 750.000$ sillares.

5.3. Con el diámetro anterior elegido necesitaríamos 1.162 carros romanos.

6. LOS ARQUEROS MATEMÁTICOS

6.1. Siempre que disparen con un ángulo menor de 46,22° = 46° 13' 12''.

6.2. El gráfico sería una parábola, la altura va desde 0 hasta 225 m. de máxima y luego vuelve a bajar hasta 0 en los 440,38 m. que tiene de alcance.

6.3. A más de 700 metros de distancia.

7. LOS IMPUESTOS DEL IMPERIO

7.1. La ciudad de Tarraco.

7.2. Suponiendo que cada litro de aceite y de vino pesan 1 kg. En la tabla siguiente viene reflejado el número de barcos.

	Cartago Nova	Gades	Saguntum	Tarraco	Valentia
Total Tm	32	42,5	37,6	43,8	37,4
Nº barcos	1	2	1	2	1

SOLUCIONES

7.3. Disponen de varias opciones, la ideal sería que representasen en el mismo gráfico los diferentes productos y la producción de las ciudades. Una buena opción puede ser el gráfico de múltiples barras. También podrían hacer un gráfico para cada producto y la producción de las diferentes ciudades. La tercera opción sería un gráfico para cada ciudad y todos los productos, pero éste no permitiría al emperador comparar los resultados.

8. LA CONQUISTA DE GERMANIA

8.1. En realidad sólo dos batallas pues, aunque la 3ª puede ir con cualquiera de las otras, quitada ésta sólo hay dos legiones que sumarían los 4.000 soldados necesarios, la 2ª y la 4ª.

8.2. La 3ª legión puede ir con cualquiera de las restantes luego es la que más posibilidades tiene de ir, 5. La 1ª, la 5ª y la 6ª legión sólo irían a la batalla con la 3ª. Las tres son las que menos posibilidades tendrían, 1.

Tras las dos primeras batallas, el número de soldados de cada legión sería:

	1ª Legión	2ª Legión	3ª Legión	4ª Legión	5ª Legión	6ª Legión
Soldados	1.350	1.800	2.250	1.800	1.750	1.800

Ahora todos tendrían posibilidades de entrar en batalla pues dos legiones cualesquiera siempre suman más de 3.000 soldados.

9. LA CARRERA HASTA SAGUNTUM

9.1. Ninguno de los dos, lo cierto es que llegaron al mismo tiempo.

9.2. Cornelius en realidad cabalgaba 12 horas al día a 40 km/h., en un día recorría 480 km.; los 2.000 km. que separaban Roma de Saguntum en 4 días y 4 horas. Maximiliano navegaba a 15 km/h. las 24 horas del día, en un día recorría 360 km.; los 1.500 km. que separaban por mar Roma de Saguntum en 4 días y 4 horas.

9.3. En la tabla adjunta se recogen las distancias recorridas cada día por los dos hermanos.

	1	2	3
Cornelius	480	960	1.440
Aurelius	225	450	675
Suma	705	1.410	2.115

Se cruzaron por tanto el tercer día.

9.4. Al comenzar el tercer día les restaban 590 km. por recorrer para encontrarse. Como entre los dos avanzan 65 km. por cada hora, se encontrarían al cabo de 9,07 horas cabalgando. Aurelius ya habría acabado su jornada pues cabalgaba 9 horas al día. Por tanto estaban a 675 km. de Saguntum.

9.5. Aurelius estaba descansando (cenando) y Cornelius todavía cabalgando.

SOLUCIONES

1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

1.1. Escríbanse todos los números formulados en el testamento, es decir, 3 del hijo, 2 de la hija, 2 de la madre y 1 de la iglesia; súmense y tendremos 8, que es el divisor; el número de escudos, 2.000, es el multiplicador por el que se multiplica cada una de las partes; el producto se divide por 8; y el cociente dará la solución. Esta será: 750 escudos para el hijo, 500 para la hija, 500 para la mujer y 250 para la iglesia. De igual forma se operará si la mujer da a luz dos hijos o dos hijas o dos hijos y una hija.

1.2. Se debe coger cierto número para el tercero, por ejemplo el 2, y como el segundo debe recibir el triple del tercero, recibirá 6 que es el triple de 2; y el primero recibirá 12. Estos tres números, que son los multiplicadores, suman 20. Ahora se multiplica el dividendo, es decir, 1.000 francos, por cada uno de aquellos números y el resultado se divide por el divisor; el cociente es la solución. Hechos esto, el primero tendrá 600, el segundo 300 y el tercero 100.

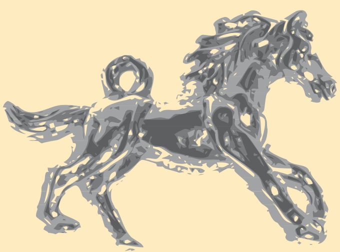
1.3. Al primer hijo le correspondería $\frac{12}{25}$ del total. Al segundo hijo le correspondería $\frac{6}{25}$ del total. Al tercer hijo le correspondería $\frac{4}{25}$ del total. Al cuarto hijo le correspondería $\frac{3}{25}$ del total.

1.4. Reparto proporcional: 3 + 6 + 21 = 30

Pedro: $\frac{3}{30}\cdot 18 = 18$, Marta: $\frac{21}{30}\cdot 18 = 112{,}6$ y Juan: $\frac{6}{30}\cdot 18 = 3{,}6$.

1.5. Regla Igualitaria: Total rosquillas = 18; Niños = 3; $\frac{18}{3} = 6$ rosquillas le corresponden a cada uno.

1.6. $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{n}} = \frac{90}{3} = 30$; $r_1 = 20$, $r_2 = 25$; $r_3 = 100$; $\min(r_1, 30)$ $\min(r_2, 30)$ $\min(r_3, 30)$; 20; 25; 30. Como 20 y 25 son menores que la cantidad que les correspondería de 30, los restamos de la cantidad a repartir: 90–20–25=45. Luego a Pedro le corresponde 20, a Juan 25 y a Marta 45.



1.7. Hallamos primero la constante de proporcionalidad inversa:

$\frac{\mathbf{k}}{10} + \frac{\mathbf{k}}{15} + \frac{\mathbf{k}}{30} = 300$; $\frac{3\mathbf{k} + 2\mathbf{k} + \mathbf{k}}{30} = 300$; $6k = 9.000$; $\mathbf{k} = \frac{9.000}{6} = 1.500$

A Pedro le corresponden $\frac{1.500}{10} = 150$ dátiles

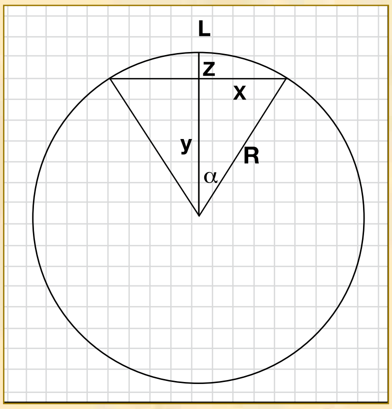
A Juan $\frac{1.500}{15} = 100$ dátiles

y a Marta $\frac{1.500}{30} = 50$ dátiles

2. LA GEOMETRÍA: SAVASORDA

2.1. $\mathbf{x}^2 - 4\mathbf{x} = 21$. Resolviendo se obtiene x = 7 y el área es 49.

2.2. Sea L un arco de circunferencia de radio R:

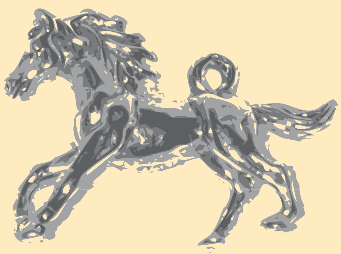


Si la cuerda mide 6, entonces x=3 y como el radio mide 5,25 se tiene

$\mathbf{sen}\alpha = \frac{3}{5,25} = 0,57$. Por tanto α=34,85°. Mediante una regla de tres:

$\mathbf{L} = \frac{2\pi R \cdot 2\alpha}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5,25 \cdot 69,70}{360} = 6,39$

2.3. Se obtiene $2\alpha = \frac{360 \cdot 5,5}{2 \cdot \pi \cdot 16,5} = 19,10°$. Por tanto α=9,55°.
Como x= R·senα= 16,5·sen(9,55°)= 2,7375,
el segmento mide 5,475.



SOLUCIONES

2.4. En este caso x=4, y=R-2 y z=2. Aplicando Pitágoras $(\mathbf{R}-2)^2 + 4^2 = \mathbf{R}^2$. Al resolver R=5 y por tanto el diámetro vale 10.

2.5. Se resuelve la ecuación $x^2+(x+2)^2=100$ que da la anchura x=6.
La altura es 8 y el área 48.

2.6. Las semidiagonales que miden 8 y 6 son los catetos de un triángulo equilátero de hipotenusa el lado del rombo.
Por tanto le lado mide $\sqrt{8^2+6^2}=10$.

3. EL ÁLGEBRA: BEN EZRA

3.1. $\left(\mathbf{x}+\frac{1}{3}\mathbf{x}\right)+\frac{1}{4}\left(\mathbf{x}+\frac{1}{3}\mathbf{x}\right)=30$. Y operando se obtiene x=18.

3.2. $\left(\mathbf{x}+\frac{1}{3}\mathbf{x}+4\right)+\frac{1}{4}\left(\mathbf{x}+\frac{1}{3}\mathbf{x}+4\right)=40$. Y operando se obtiene x=21.

3.3. $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+4)+5+(\mathbf{x}+4)=\frac{3}{2}(\mathbf{x}+4)+5$. La cantidad obtenida sufre un nuevo

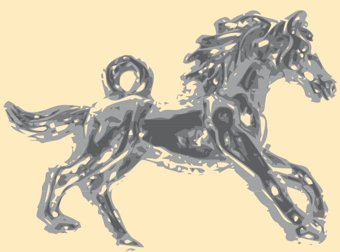
aumento: $\frac{3}{2}(\mathbf{x}+4)+5+\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(\mathbf{x}+4)+5\right]=70$.

Y operando se obtiene x=30.

3.4. Iniciemos el problema por el final: tiene 8 dracmas que entrega; al ser consecuencia de duplicar, antes tenía 4 dracmas; pero había dado 4 dracmas, luego tenía 8 dracmas; como había duplicado tenía 4 dracmas; pero había dado 2 dracmas, luego tenía 6 dracmas antes de doblar; por tanto inicialmente tenía 3 dracmas.

Mediante la ecuación: $2[2(\mathbf{x}-2)-4]-8=0$ se obtiene el mismo resultado.

3.5. Siguiendo el mismo razonamiento "de atrás hacia a delante":
$1+2 \rightarrow 6+2 \rightarrow 16+2 \rightarrow 36$. Tenía 36 manzanas.



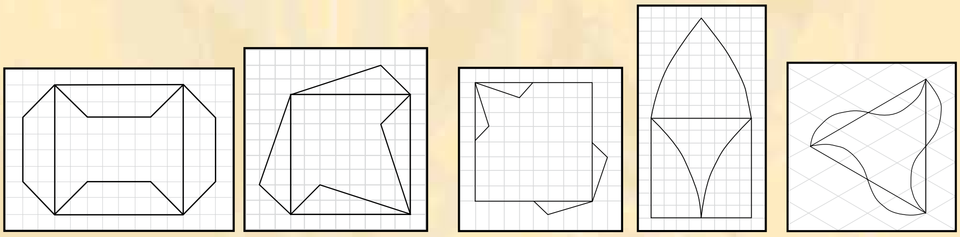
Mediante ecuaciones es bastante más complejo:

Pasos	Tiene	Entrega	Le quedan
1º guardia	x	$\frac{x}{2} + 2$	$\frac{x}{2} - 2$
2º guardia	$\frac{x}{2} - 2$	$\frac{x}{4} + 1$	$\frac{x}{4} - 3$
3er guardia	$\frac{x}{4} - 3$	$\frac{x}{8} + \frac{1}{2}$	$\frac{x}{8} - \frac{7}{2} = 1$

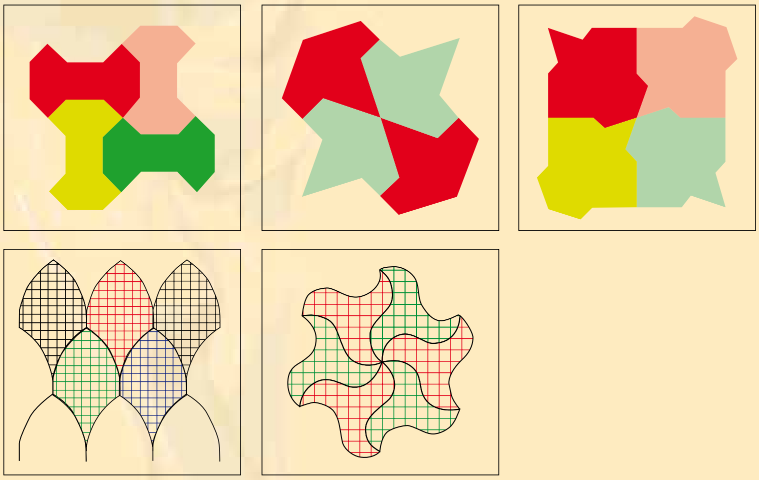
Y resolviendo la ecuación se obtienen 36 manzanas.

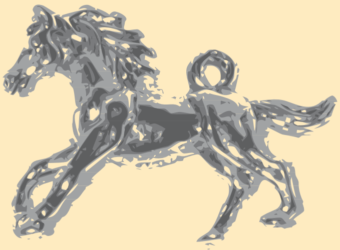
4. MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

4.1. Las figuras se han construido de la siguiente manera:



4.2. Los patrones para recubrir el plano con las teselas anteriores son:





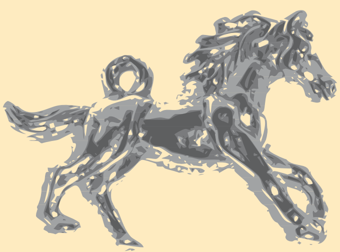
Mediante un giro de 90° se consigue colocar un "hueso" verticalmente y luego mediante traslaciones cubrir el plano. Mediante un giro de 180° (equivalente a una simetría axial) se consiguen dos piezas; girando cada una de ellas 90° y con una traslación posterior se consigue el objetivo para "el avión". El mismo sistema se debe emplear para "el pez volador". En el caso de "la escama" basta con traslaciones. Finalmente, para "la pajarita" seis giros de 60° con centro en uno de sus vértices se consiguen 6 piezas iguales unidas y así sucesivamente.

4.3. perímetro del "hueso": $4 \cdot 4 + 4\sqrt{8} = 8(2+\sqrt{2})$ *cm.*
perímetro del "avión": $4\sqrt{8} + 4\sqrt{40} = 8(\sqrt{2}+\sqrt{10})$ *cm.*
perímetro del "pez volador": $4 \cdot 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{10} = 4(4+\sqrt{2}+\sqrt{10})$ *cm.*

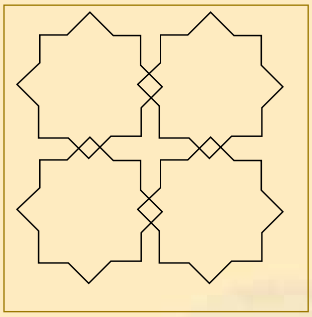
4.4. El "hueso" tiene dos ejes de simetría perpendiculares, en cambio "el pez volador", "el avión" y "la escama" sólo tienen uno. En el caso de "la pajarita" tiene simetría radial de tercer orden.

4.5. Para crear "tus losetas" debes seguir estos consejos:
Cuadrado: El trozo que recortes de un lado, mediante un giro de 90° con centro en el extremo de ese lado, se lleva al lado contiguo. Haz lo mismo con los otros dos lados, tomando como centro de giro el vértice opuesto al anterior.
Triángulo: El trozo que recortes de la mitad de un lado mediante un giro de 180° con centro en el punto medio del lado, lo añades a la otra mitad. Haz lo mismo con los otros lados del triángulo.

4.6. a) La figura tiene una simetría central llamada de Leonardo: es un grupo cíclico C_8, pues cada 45° la figura se superpone.
b) Si llamamos "x" al lado de una estrella, el lado del cuadrado vale: $2x+\sqrt{2}x=8$ y por tanto $x=4(2-\sqrt{2})$.
El perímetro de la estrella es $p=16 \cdot 4(2-\sqrt{2})=64(2-\sqrt{2})$.
El área es la del cuadrado más 4 "esquinas" $A=64+4\frac{x^2}{2}=262-128\sqrt{2}$.



4.7. Por ejemplo:



5. UN JUEGO MEDIEVAL: EL MORRIS

5.1. Se puede organizar un campeonato entre los alumnos y alumnas de la clase.

5.2. Se trata de que el alumno/a investigue y contraste sus conclusiones con otros compañeros/as.

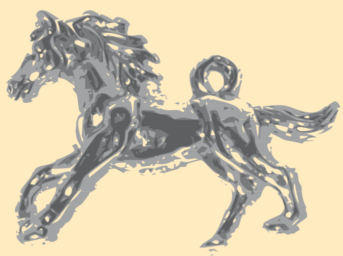
5.3.

Morris 9	Morris 5	Morris 7	Morris 12
32 cm.	24 cm.	26 cm.	$34 + 4\sqrt{2}$

5.4. En el morris de 12 la araña recorrería $31{,}5 + 7\sqrt{2}$ cm.

6. EL NÚMERO CORDOBÉS

6.1. a) Los triángulos son isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia.
b) El ángulo BAC vale $\alpha+\beta$ por ser los triángulos isósceles.
c) El ángulo BOD vale 2α y el ángulo COD vale 2β por ángulos suplementarios. Como $2\alpha+2\beta=180°$, entonces $\alpha+\beta=90°$ y el triángulo es rectángulo.



SOLUCIONES

6.2. a) es isósceles y MN = $\sqrt{2}$**R**.

b) Por simetría OP'=NP'=MN/2.

c) $\frac{NP}{PQ} = \frac{PP'}{NP}$, y por tanto L^2= PQ·PP'= 2**R**(**OP** – **OP'**)= 2**R**(**R** – $\sqrt{2}$**R**).

Luego **L**= **R**($\sqrt{2-\sqrt{2}}$) . Finalmente. $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 1{,}306562964$

6.3. a) Si dibujamos un triángulo rectángulo de catetos la unidad, la hipotenusa vale $\sqrt{2}$. Con este radio dibujamos la circunferencia.
b) La bisectriz de la bisectriz del 1º cuadrante vale 22,5°.
c) La proyección del segmento OB es el segmento OC cuyo valor es el número cordobés:
C= $\sqrt{2}$ cos 22,5°= 1,306562964...

d) $$C=\sqrt{2}\,cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

(si se racionaliza esta expresión se obtiene la expresión anterior).

6.4. Como es una bicuadrada, $2z^2-4z+1=0$ y al resolver se obtiene una de las raíces: $z=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}$ y finalmente $x=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$. Si se racionaliza la expresión del número cordobés se llega a la misma expresión.

6.5. El perímetro esta formado por 6/8 de circunferencia y un segmento horizontal: **p**= $\frac{6}{8}\cdot 2\pi R + \sqrt{2}$**R**.

El área está formada por 6 sectores circulares y 2 triángulos isósceles equiláteros: **A**= $\frac{6}{8}\cdot \pi R^2 + \frac{R^2}{2}$.

7. MONEDAS EN LA EDAD MEDIA

7.1. 11 x 24 + 4 = 268; Plata pura =12 x 24 =288; $\frac{268}{288}$ = 93,05% de plata pura.

7.3. La mitad de cada uno.

7.4. 5 x 24 + 4 = 124
7 x 25 + 5 = 173

$$\frac{124}{288} = 0{,}4305$$

$$\frac{173}{\mathbf{x}} = 0{,}4305 \qquad \mathbf{x} = \frac{173}{0{,}4305} = 402 \text{ gramos}$$

7.5. 5 · 9 + 6 · 8 + 7 · 9 + 8 · 3 = 26 x

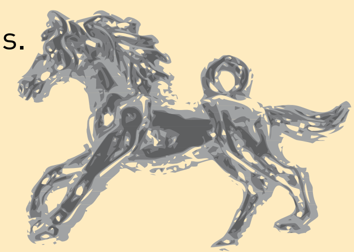
$$x = \frac{180}{26} = 6{,}9 \text{ dineros}$$

0,9 · 24 = 21 granos
6 dineros y 21 granos

8. LA ARITMÉTICA: GASPAR NICOLÁS

8.1. Suma los precios y tendrás 200 cruzados. El dinero que el mercader va a pagar son 350, 350/200 = $1\cdot\frac{3}{4}$ por tanto tomará de cada especia un quintal y tres arrobas. Para comprobarlo, un quintal y tres arrobas del clavo que cuesta a 100 será 175, de la canela que cuesta a 60 son 105 y del jengibre que es a 40 son 70 cruzados, y sumando todo tenemos justamente los 350 cruzados.

8.2. En una hora vacían entre todos: $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{57}{60}$ de la pila.
60:57 = 1,052 horas tardará en vaciarse completamente
0,052 x 60 = 3 minutos
Tardará en vaciarse completamente 1 hora y 3 minutos.



SOLUCIONES

8.3. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$; 6:11= 0,54 días.
Tardará aproximadamente en llegar a la isla medio día.

8.4. La respuesta coincide con la del problema anterior.

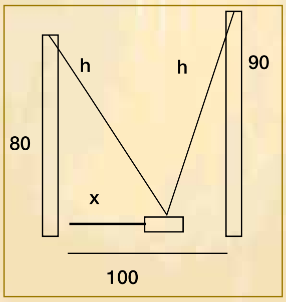
8.5. 4 flamencos en 1 día beberán $\frac{10}{3}$ cántaros.

5 españoles en 1 día beberán $\frac{20}{6}$ cántaros.

4 flamencos y 5 españoles beberán en 1 día $\frac{10}{3}+\frac{20}{6}=\frac{40}{6}$ cántaros.

60: $\frac{40}{6}$ = 9 días tardarán en beberse el barril.

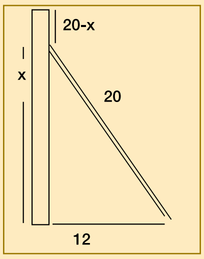
8.6. Aplicando Pitágoras:



$\mathbf{h}^2 = 80^2 + \mathbf{x}^2$
$\mathbf{h}^2 = 90^2 + (100 - \mathbf{x})^2$
$80^2 + \mathbf{x}^2 = 90^2 + (100 - \mathbf{x})^2$

Despejando obtenemos **x** = 58,5 metros de distancia a la torre A y a la torre B 100 – 58,5 = 41,5 m.

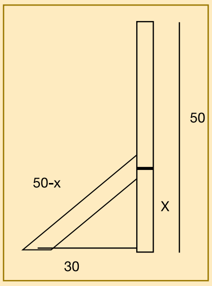
8.7. Aplicando Pitágoras:



$\mathbf{x}^2 = 20^2 - 12^2$
$\mathbf{x}^2 = 256$
$\mathbf{x} = \sqrt{256} = 16$

La altura que falta para llegar a la torre es: 20 – 16 = 4

8.8.



$(50 - \mathbf{x})^2 = 30^2 + \mathbf{x}^2$

$100\mathbf{x} = 1.600$

$\mathbf{x} = 16$

8.9. Llamamos x a la distancia del pie de la escalera a la base de la primera torre. La distancia al pie de la segunda torre será de (22-x). La altura de la escalera es constante e igual a h.

9. LA BARRACA VALENCIANA

9.1. Resolviendo la ecuación $\mathbf{x}(\mathbf{x}+3,9)= 4,59$ se obtienen las dimensiones de 5,1 m. y 9 m. respectivamente.

9.2. a) Será el MCD (510, 900)= 30 cm.
b) 510 baldosas se necesitarán pues 510/30=17 y 900/30= 30 y 17·30= 510.

9.3. a) En una hora juntos hacen $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ de la obra.
Luego necesitarán 2 horas.

b) 6,5 horas tarda el aprendiz (si llamamos x al tiempo en horas que tarda el jefe, planteamos la ecuación: $\frac{1}{\mathbf{x}}+\frac{1}{\mathbf{x}+1}=\frac{1}{3}$).

9.4. Paredes laterales: y= 2,55; y= -2,55.

Alerones del tejado: $\frac{\mathbf{x}}{2,55}+\frac{\mathbf{y}}{2,5}=1$; $\frac{\mathbf{x}}{-2,55}+\frac{\mathbf{y}}{2,5}=1$.

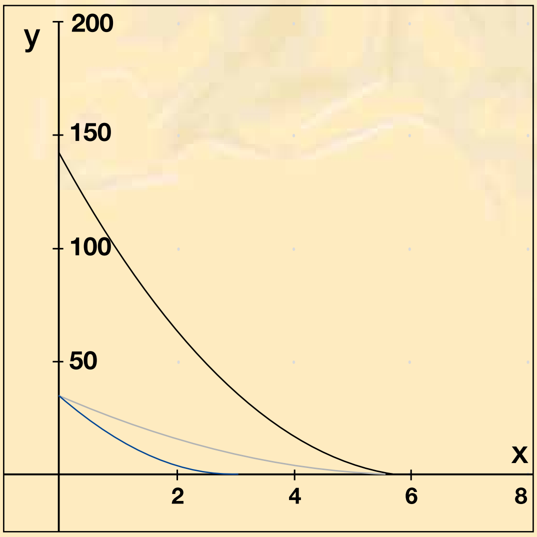
10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

10.1. a) El agua tiene inicialmente una altura de 36 cm. y tarda 6 minutos en vaciarse.
b) La función será **H** = (**t** – 6)^2.

10.2. Se vacía en la mitad de tiempo pues hemos aumentado la sección de salida al doble. Al ser **t** = $\frac{1}{2}(6 - \sqrt{H})$ la función es ahora **H** = 4(**t** – 3)^2.

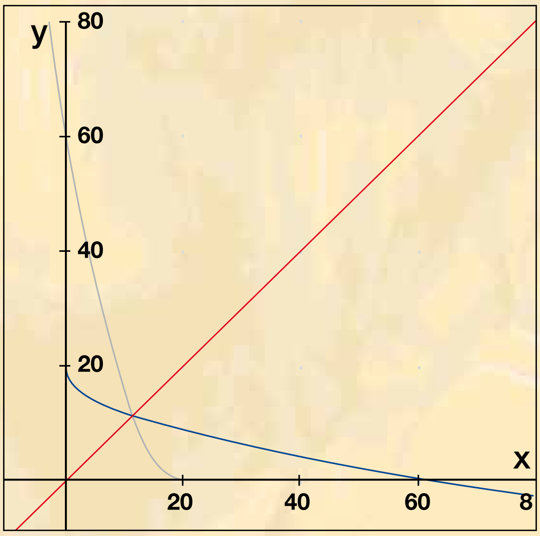
10.3. Si $6 = \frac{1}{2}(\sqrt{H_0} - 0)$ se obtiene H_0=144 cm. Es decir 4 veces la altura anterior. La fórmula es **H** = 4(**t** – 6)^2.

Se observa que se puede conseguir que dos clepsidras se vacían al mismo tiempo con diferente volumen inicial y dos clepsidras con el mismo volumen se vacían en tiempos distintos.



10.4. Como el agua inicialmente alcanza una altura de 64 cm. tendremos $\mathbf{t} = \frac{1}{\mathbf{k}}(8 - \sqrt{H})$. Si queremos que se vacíe en 20 minutos $20 = \frac{1}{\mathbf{k}}8$ y la función será $t = 0{,}2(8 - \sqrt{x})$.

La otra función es $H = 0{,}16\ (x - 20)^2$. Al representar ambas funciones se observa que son simétricas respecto de la bisectriz y=x al ser funciones recíprocas.



SOLUCIONES

1. UN VIAJE COMPLICADO

1.1. Partieron 150 marineros.

2. KOUROS Y KORES

2.1. a)

PUNTOS	SIMETRÍA RESPECTO:		
	(0,0)	EJE OX	EJE OY

b) En el primer cuadrante.

3. LA ESFINGE

3.1. Después de 7 semanas 140 monedas.
Después de 20 semanas 335 monedas.
Después de 1 año 755 monedas.
Después de n semanas: $\mathbf{a}_n = 50 + (\mathbf{n} - 1) \cdot 15$

4. UNA CENA MUY ESPECIAL

4.1. La ecuación que debe resolver Penélope es: $\frac{\mathbf{x}^2}{3} + \frac{\mathbf{x}}{3} - 2 = 0$
A la mesa a cenar se sentarán sólo dos personas.

SOLUCIONES

5. UN BARCO DIFERENTE

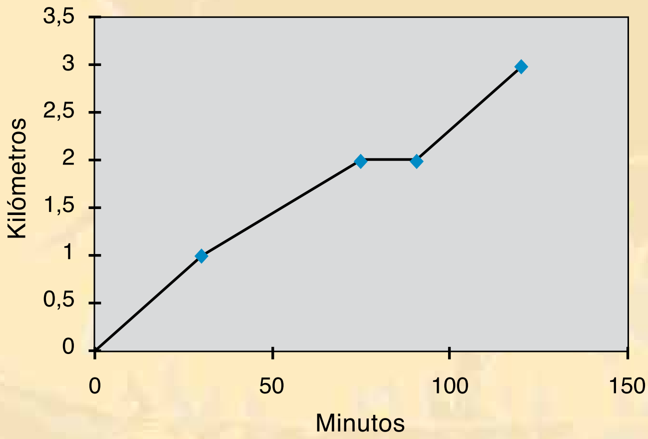
5.1. La tela que quieren pintar de rojo tiene 53,54 m^2.
a) Gastarán 26,77 litros y deberán comprar 27 litros.
b) En total gastarán 81 monedas y les sobrarán 9.

6. EL MEGARON

6.1. a) 90,43 m^2.
b) 12 sábanas.

7. CUANDO EL RIO SUENA

7.1. a)



b) Dom f= [0,120]
Rec f= [0,3]
Intervalos de crecimiento: (0,75) → (90,120)
Intervalo constante: (75,90)
Mínimo: (0,0)
Máximo: (120,3)
Es continua en [0,120]

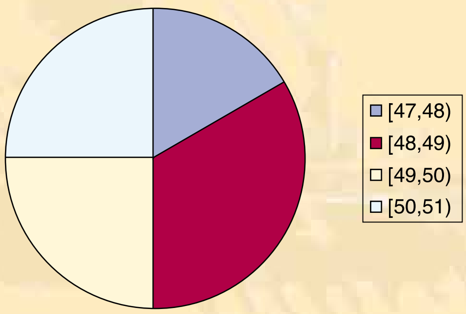
c) La expresión analítica será:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{30} & 0 \rightarrow \mathbf{x} \leftarrow 30 \\ \frac{x}{45}+\frac{1}{3} & 30 \rightarrow \mathbf{x} \leftarrow 75 \\ 2 & 75 \rightarrow \mathbf{x} \leftarrow 90 \\ \frac{x}{30}-1 & 90 \rightarrow \mathbf{x} \leftarrow 120 \end{cases}$$

8. ¿QUIÉN GANARÁ?

8.1. a) La media de lanzamientos de disco es de $\bar{x}$ = 48,93333 metros.
Los ángulos correspondientes al sector circular que se pide:
[47,48], le corresponde 60°
[48,49], le corresponde 120°
[49,50], le corresponde 90°
[50,51], le corresponde 90°

b) **Diagrama de Sectores**



c) La desviación típica de los lanzamientos es de σ = 1,08346